1. 삼차방정식 $x^3+27=0$의 모든 근의 합은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$x^3+3^3=0,\ (x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3+\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2}=0$

해설

$x^3+27=0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

2. 다음은 연립부등식 $2x-4 \le -x+2 < 2x+1$ 를 세 친구가 각각 풀이한 것이다.
다음 중 풀이 과정을 <u>틀린</u> 친구는 누구인지 찾아라.

<지윤>
$2x-4 \le -x+2 < 2x+1$ 을 나누어 풀면
① $2x-4 \le -x+2$
$2x+x \le 2+4$
$3x \le 6$
$x \le 2$
② $-x+2 < 2x+1$
$-x-2x < 1-2$
$-3x < -1$
$x > \frac{1}{3}$
$\vdots$

<미진>
$2x-4 \le -x+2 < 2x+1$ 의 각 변에 $2x$ 를 빼면
$-4 \le -3x+2 < 1$ 이다.
그리고 각 변에 2를 뺀 후 각 변에 -3 으로 나누면
$-6 \le -3x < -1$
$\frac{1}{3} < x \le \frac{6}{3}$
$\vdots$

<동호>
$2x-4 \le -x+2 < 2x+1$ 을 나누어 풀면
① $2x-4 \le -x+2$
$2x+x \le 2+4$
$3x \le 6$
$x \le 2$
② $2x-4 < 2x+1$
$\vdots$

▶ 답 :

▷ 정답 : 동호

해설

(풀이) 지윤이의 풀이와 미진이의 풀이는 제대로 풀었다. 동호의 풀이는
②
$2x-4 < 2x+1$
부분을 $-x+2 < 2x+1$ 로 고쳐서 풀어야 한다.

3. 연립부등식 $\begin{cases} 4x-2 \geq -10 \\ 6-x > 3 \end{cases}$ 의 해가 $a \leq x < b$ 일 때, 상수 $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$6-x>3 \rightarrow x<3$

$4x-2 \geq -10 \rightarrow x \geq -2$

$\therefore\ a+b=-2+3=1$

4. 부등식 $|7-3x|>2$를 풀면?

① $x<\frac{5}{3}$ 또는 $x>3$

② $x<\frac{5}{2}$ 또는 $x>2$

③ $x<\frac{5}{4}$ 또는 $x>4$

④ $x<1$ 또는 $x>3$

⑤ $x<\frac{5}{6}$ 또는 $x>6$

해설

$|7-x|>2$ 에서

$7-3x>2$ 또는 $7-3x<-2$

$-3x>-5$ 또는 $-3x<-9$

$\therefore x<\frac{5}{3}$ 또는 $x>3$

5. 이차부등식 $x^2 + 2x - 35 < 0$을 풀면?

① $-15 < x < 12$ ② $-15 < x < 5$ ③ $-7 < x < 5$

④ $-7 < x < 2$ ⑤ $-5 < x < 7$

해설

$x^2 + 2x - 35 < 0$에서 $(x+7)(x-5) < 0$

$\therefore -7 < x < 5$

6. x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3+3(-1)^2-k(-1)-5=0$

$\therefore\ k=3$

7. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$
② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$
③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$
⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

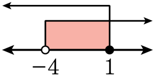
삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

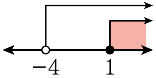
$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

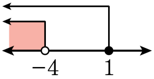
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

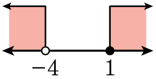
$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

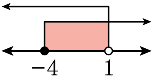
8. 연립부등식 $\begin{cases} x+3>-1 \\ 6-4x \geq 3-x \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 옳게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$x+3>-1 \rightarrow x>-4$

$6-4x \geq 3-x \rightarrow x \leq 1$

$\therefore \ -4<x \leq 1$

9. 연립부등식 $\begin{cases} 3x - 3 > -x + 9 \\ 5x < 4x + a \end{cases}$ 를 만족하는 자연수가 2개일 때, a 의 값의 범위는?

① $3 < a \leq 4$ ② $3 < a < 4$ ③ $4 \leq a < 5$

④ $4 < a \leq 5$ ⑤ $5 < a \leq 6$

해설

$3x - 3 > -x + 9,\ \ x > 3$

$5x < 4x + a,\ \ \ x < a$

$\therefore\ \ 3 < x < a$

만족하는 자연수가 2개, 즉 4, 5 이므로 $5 < a \leq 6$

10. 이차부등식 $x^2 - 2kx + 2k \leq 0$이 해를 갖지 않을 때, 실수 k값의 범위는?

① $-1 \leq k \leq 0$

② $-2 < k < 0$

③ $0 \leq x \leq 2$

④ $0 < k < 2$

⑤ $k < 0$, 또는 $k > 2$

해설

주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면
방정식 $x^2 - 2kx + 2k = 0$이 허근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2k < 0, \quad k(k-2) < 0$$

$\therefore 0 < k < 2$

11. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$의 해가 $2 < x < 3$일 때, $a + b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$2 < x < 3$ 가 해이므로

$(x-2)(x-3) < 0$

$x^2 - 5x + 6 < 0,\ a = -5, b = 6$

$\therefore\ a + b = 1$

12. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $-2 < x < 1$일 때 부등식 $cx^2 - bx - a > 0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로 $a < 0$
해가 $-2 < x < 1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1) < 0$,
즉 $x^2 + x - 2 < 0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2 + ax - 2a > 0$ 이 부등식이
$ax^2 + bx + c > 0$ 과 같으므로
$b = a, c = -2a \cdots$ ㈎
㈎를 $cx^2 - bx - a > 0$ 에 대입하면
$-2ax^2 - ax - a > 0$, $2x^2 + x + 1 > 0 (\because -a > 0)$
이 때 방정식 $2x^2 + x + 1 = 0$ 의 판별식
$D = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로
$2x^2 + x + 1 > 0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 의 9개이다.

13. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \le x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

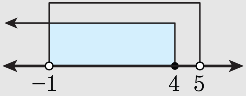
㉠ $2x \le x+4$,

$\therefore x \le 4$

㉡ $x^2-4x-5<0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1)<0$

$\therefore -1<x<5$



㉠, ㉡의 범위의

공통범위는 $-1<x \le 4$

$\therefore x=0, 1, 2, 3, 4$ 총 5 개

14. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ x^2-2x-3>0 \end{cases}$ 의 값은?

① $x>-1$ ② $-4<x<-1$ ③ $0<x<4$

④ $1<x<4$ ⑤ $-4<x<3$

해설

$$x^2+3x-4<0 \Rightarrow (x-1)(x+4)<0$$
$$\Rightarrow -4<x<1$$

$$x^2-2x-3>0 \Rightarrow (x+1)(x-3)>0$$
$$\Rightarrow x<-1 \text{ 또는 } x>3$$

$\therefore$ 공통부분을 구하면 $-4<x<-1$

15. 사차식 $x^4 - 4x^2 - 12$ 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

② $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+2i)(x-2i)$

③ $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

④ $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$

⑤ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{6}i)(x-\sqrt{6}i)$

해설

$x^4 - 4x^2 - 12,\quad x^2 = Y$ 라 하자

$\Rightarrow \quad Y^2 - 4Y - 12 = (Y+2)(Y-6) = 0$

$Y = -2$ 또는 $Y = 6$

$\Rightarrow \quad x^2 = -2,\quad x^2 = 6$

$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}i,\quad x = \pm\sqrt{6}$

$\therefore \quad x^4 - 4x^2 - 12$

$= (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

16. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+5=0$ 의 한 근이 $2-i$ 일 때, 실수 a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 10

해설

$x^3+ax^2+bx+5=0$ 의 세 근 : $2-i,\ 2+i,\ \alpha$
세 근의 합 : $-a=4+\alpha \cdots ①$
세 근의 곱 : $-5=(2+i)(2-i)\alpha=5\alpha$
$\therefore \alpha=-1$, ①식에 대입하면 $a=-3$
$b=(2+i)(2-i)+(2+i)\cdot(-1)+(2-i)\cdot(-1)=5-4=1$
$\therefore a^2+b^2=10$

17. 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 α라 할 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$의 값은?

① $-1 \pm \sqrt{3}i$ ② $1 \pm \sqrt{3}i$ ③ $3 \pm \sqrt{3}i$

④ $6 \pm \sqrt{3}i$ ⑤ $9 \pm \sqrt{3}i$

해설

$\alpha^3 = 8$에서 $(\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 4) = 0$,

α는 $\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0$의 근이다.

$\therefore\ \alpha = -1 \pm \sqrt{3}i$

이 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$

$= 1 + \alpha + (-2\alpha - 4) + 8$

$= 5 - \alpha$

$= 5 - (-1 \pm \sqrt{3}i)$

$= 6 \mp \sqrt{3}i$

18. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$을 풀면 $x = 2(\text{cm})$

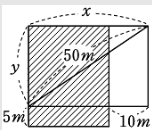
19. 대각선의 길이가 50 m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5 m 늘리고, 가로를 10 m 줄이면 넓이가 50 m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots ㉠ \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore\ x = 2y + 20 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2y+20)^2 + y^2 = 50^2$

$y^2 + 16y - 420 = 0$

$(y-14)(y+30) = 0$

$\therefore\ y = 14,\ -30$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$

20. 두 식 $2x+y=10$, $y<x<3y$을 동시에 만족시키는 정수 x, y에 대하여 $x-y$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2x+y=10$에서 $y=10-2x$이므로

$10-2x<x<3(10-2x)$

$\therefore \dfrac{10}{3}<x<\dfrac{30}{7}$

x는 정수이므로 $x=4$

따라서 $y=2$

$\therefore x-y=2$

21. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$ 이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\dfrac{3}{4}$ ② $a > -\dfrac{1}{2}$ ③ $-1 < a < 1$
④ $a \leq \dfrac{2}{3}$ ⑤ $a < 2$

해설

$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2 - (a+2)t + \dfrac{a^2+1}{4} = 0$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$D = (a+2)^2 - 4 \times \dfrac{a^2+1}{4} \geq 0$

$4a+3 \geq 0$

$\therefore \ a \geq -\dfrac{3}{4}$

22. 실수 x, y에 대하여 $2x^2+y^2+2xy+2x-2y+5=0$일 때, xy 의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

$2x^2+y^2+2xy+2x-2y+5=0$ 을
x 에 대한 내림차순으로 정리하면
$2x^2+2(y+1)x+y^2-2y+5=0 \quad \cdots$ ㉠
이 때, x 는 실수이므로 ㉠은 실근을 가져야 한다.
$D=(y+1)^2-2\left(y^2-2y+5\right)\geq 0$
$-y^2+6y-9\geq 0 \;\; (y-3)^2\leq 0$
$\therefore y=3$
$y=3$을 ㉠에 대입하면
$2x^2+8x+8=0,\;\; x^2+4x+4=0$
$(x+2)^2=0$
$\therefore \;\; x=-2 \;\; \therefore \;\; xy=(-2)\cdot 3=-6$

23. 두 부등식 A : $\frac{5x+1}{6} < 1$, B : $3x-8 < -x$ 에 대하여 A에서 B를 제외한 부분을 만족하는 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

$A : \frac{5x+1}{6} < 1$

$\therefore x < 1$

$B : 3x-8 < -x$

$\therefore x < 2$

따라서 A에서 B를 제외한 부분을 만족하는 자연수의 개수는 0 개이다.

24. 사료 A, B 의 1g 당 영양소 C, D 의 함유량과 100g 당 단가는 다음과 같다.

	C(mg)	D(mg)	단가(원)
A	21	15	500
B	16	19	600

하루에 두 사료를 모두 합해 0.3kg 먹는 어떤 동물의 1 일 영양소 섭취량이 C 는 60g 이하, D 는 50g 이하가 되게 하려고 한다. 구입한 사료의 가격이 가장 쌀 때, 사료 B 의 무게를 구하여라.

▶ 답 : g

▷ 정답 : 60 g

해설

사료 A 의 무게를 xg 이라 하면 사료 B 의 무게는 $(300-x)$ g 이다.

C 가 60g 이하이므로

$0.21x+0.16(300-x) \le 60 \cdots$ ㉠

D 가 50g 이하이므로

$0.15x+0.19(300-x) \le 50 \cdots$ ㉡

㉠ 을 풀면 $x \le 240$

㉡ 을 풀면 $x \ge 175$

$\therefore\ 175 \le x \le 240$

구입한 사료의 가격이 가장 싸려면 A 를 많이 구입해야 하고 B 는 적게 구입해야 한다. 따라서 구하는 사료 B 의 무게는 $300-240=60$ (g) 이다.

25. 부등식 $[x-1]^2+3[x]-3<0$의 해는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-2 \le x < 1$ ② $-2 \le x < 0$ ③ $-1 \le x < 1$

④ $-1 \le x < 0$ ⑤ $0 \le x < 2$

해설

$x-1=A$라 하면 $x=A+1$

$\therefore [A]^2+3[A+1]-3=[A]^2+3[A]+3-3<0$

$[A]([A]+3)<0 \quad \therefore -3<[A]<0$

$-2 \le A < 0 \quad \therefore -2 \leqq x-1 < 0$이므로

$-1 \le x < 1$