1. 방정식 $(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 10

해설

$(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 에서

$x^2+x=A$ 라 하면

$A^2+2A-8=0$,

$(A+4)(A-2)=0$

$\therefore\ A=-4$ 또는 $A=2$

(i) $x^2+x=-4$ 일 때,

$x^2+x+4=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

(ii) $x^2+x=2$ 일 때,

$x^2+x-2=0$,

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

(i), (ii) 에서 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 이므로 실근의 합은

$-2+1=-1$

2. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서

$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$

$x^4-2x^2-3=0$

$x^2=t$로 치환하면

$t^2-2t-3=0,\ (t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(ⅰ) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$

(ⅱ) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$

(ⅰ), (ⅱ)에서 실근의 합을 구하면

$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

3. 삼차방정식 $x^3+ax+b=0$의 한 근이 i일 때, 나머지 두 근을 구하여 곱하면?(단, a, b는 실수)

① $-i$ ② 0 ③ i ④ 1 ⑤ -1

해설

$x=i$를 대입하면 $(i)^3+ai+b=0$ $(a-1)i+b=0$

a, b는 실수이므로 $a=1$, $b=0$

$x^3+x=0$, $x(x^2+1)=0$, $x=0$, i, $-i$

$\therefore$ (나머지 두 근의 곱)$=0$

4. x에 관한 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+4=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=-4$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-3+2+4=4$

5. x의 삼차방정식 $x^3+px^2+qx-105=0$의 세 근이 모두 2보다 큰 정수일 때, $p+q$의 값을 구하면?

① 56　② 21　③ 10　④ -10　⑤ -21

해설

세 근을 α , β , γ 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta+\gamma=-p$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$, $\alpha\beta\gamma=105$
마지막 식에서 $\alpha\beta\gamma=3\cdot5\cdot7$
$\therefore$ 세 근은 3, 5, 7 이다.
$\therefore\ p=-(3+5+7)=-15$,
$q=3\cdot5+5\cdot7+7\cdot3=15+35+21=71$
$\therefore\ p+q=56$

6. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$ 이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

7. 허수 w가 $\omega^3 = 1$을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$w^3 = 1 \Rightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$$\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$$
$$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2$$
$$= (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1$$

8. $x^3=1$의 한 허근이 ω일 때, $\omega^{10}+\omega^5+1$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$w^3=1,$

$x^3-1=0$

$\Rightarrow\ (x-1)(x^2+x+1)=0$의 한 허근이 ω

$\Rightarrow w^2+w+1=0$

$\omega^{10}+\omega^5+1=(w^3)^3w+w^2\cdot w^3+1$

$=w^2+w+1$

$=0$

9. 다음은 삼차방정식 $x^3+px+1=0$의 한 근을 α라고 할 때, $-\alpha$는 $x^3+px-1=0$의 근이고, $\dfrac{1}{\alpha}$은 $x^3+px^2+1=0$의 근임을 보인 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?

> α는 $x^3+px+1=0$의 근이므로 $\alpha^3+p\alpha+1=0$ $\cdots$ ㉠
> $f(x)=x^3+px-1$이라고 하면 $f(-\alpha)=$ (가)$=$ (나) $=0$ ($\because$ ㉠)
> 따라서 $-\alpha$는 $x^3+px-1=0$의 근이다. 또 $g(x)=x^3+px^2+1$ 이라고 하면 $g\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=$ (다)$=$ (라)$=$ (마) $=0$($\because$ ㉠)
> 따라서, $\dfrac{1}{\alpha}$은 $x^3+px^2+1=0$ 의 근이다.

① (가) $(-\alpha)^3+p(-\alpha)-1$
② (나) $-(\alpha^3-p\alpha+1)$
③ (다) $\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^3+p\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^2+1$
④ (라) $\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^3(1+p\alpha+\alpha^3)$
⑤ (마) $\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^3\cdot 0$

해설

α는 $x^3+px+1=0$의 근이므로 $\alpha^3+p\alpha+1=0$ $\cdots$ ㉠
$f(x)=x^3+px-1$이라고 하면 $f(-\alpha)=(-\alpha)^3+p(-\alpha)-1$
$=-(\alpha^3+p\alpha+1)=0$ ($\because$ ㉠)
따라서 $-\alpha$ 는 $x^3+px-1=0$의 근이다.
또 $g(x)=x^3+px^2+1$ 이라고 하면 $g\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^3+p\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^2+1$
$=\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^3(1+p\alpha+\alpha^3)=\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^3\cdot 0=0$ ($\because$ ㉠)
따라서 $\dfrac{1}{\alpha}$ 은 $x^3+px^2+1=0$ 의 근이다.

10. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 좌표평면의 제1사분면에 있기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $a > -1$　　② $a < -1$　　③ $a > \dfrac{3}{2}$

④ $a < \dfrac{3}{2}$　　⑤ $a > -2$

해설

$$\begin{cases} x+y=2 & \cdots ㉠ \\ ax-y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ + ㉡에서 $(a+1)x=5$

$\therefore\ x=\dfrac{5}{a+1}\cdots\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $\dfrac{5}{a+1}+y=2$

$\therefore\ y=2-\dfrac{5}{a+1}$

그런데 $x>0,\ y>0$이므로

$\dfrac{5}{a+1}>0,\ 2-\dfrac{5}{a+1}>0$에서,

$a>\dfrac{3}{2}$

11. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 $20\,\%$증가하였고, B제품은 $25\,\%$증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

12. 집과 A 정류장 사이의 거리를 x m, A 정류장과 B 정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나)를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

(가) 집에서 A 정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B 정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다. (나) 다음 날은 집에서 어제 걸어간 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B 정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

① (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=1680$

② (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=3360$

③ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

④ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=3360$

⑤ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

해설

시속 30 km $\Rightarrow$ 분속 500 m

(가) $\frac{x}{60}+3+\frac{y}{500}=10,\ \frac{x}{60}+\frac{y}{500}=7$

$\therefore\ 25x+3y=10500$

(나) $\frac{x+y}{60}=28$

$\therefore\ x+y=1680$

13. x, y가 연립방정식 $\begin{cases} x^2+4xy+y^2=10 \\ x-y=2 \end{cases}$ 를 만족시킬 때, $(x+y)^2$의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 10

해설

$(x-y)^2=4$에서

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^2=4 & \cdots ㉠ \\ x^2+4xy+y^2=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡ − ㉠ : $6xy=6$,

$\therefore\ xy=1$

$$\begin{aligned} \therefore\ (x+y)^2 &= (x-y)^2+4xy \\ &= 4+4\cdot 1=8 \end{aligned}$$

해설

실제로 연립방정식을 풀면,

$x=y+2$를 ㉡에 대입하면

$(y+2)^2+4y(y+2)+y^2=10$

$6y^2+12y-6=0,\ y^2+2y-1=0$

근의 공식을 이용하면,

$\therefore\ y=-1\pm\sqrt{2},\ x=1\pm\sqrt{2}$(복호동순)

$$\begin{aligned} \therefore\ (x+y)^2 &= ((1\pm\sqrt{2})+(-1\pm\sqrt{2}))^2 \\ &= (\pm 2\sqrt{2})^2=8 \end{aligned}$$

14. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하여라.

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} (2x-y)(x+2y)=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$$

1) $y=2x$일 때

$x^2+4x^2=5x^2=20$

$\therefore\ x=\pm 2,\ y=\pm 4$

2) $x=-2y$일 때

$4y^2+y^2=5y^2=20$

$\therefore\ y=\pm 2,\ x=\mp 4$

$(x,\ y)=(2,\ 4),(-2,\ -4),(-4,\ 2),(4,\ -2)$

$\therefore\ \alpha+\beta=\ 6,\ -6,\ -2,\ 2$

그러므로 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -6

15. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2+2xy-3y^2=-4 \end{cases}$ 의 해를 $x=a,\ y=b$라 할 때, 다음 중 a 또는 b의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ -1

해설

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 & \cdots① \\ x^2+2xy-3y^2=-4 & \cdots② \end{cases}$$

①에서 $(x+y)(x+2y)=0$,

$x=-y, x=-2y$

ⅰ) $x=-y$를 ②에 대입 $y^2=1$

$\therefore\ y=\pm1, x=\pm1$(복호동순)

ⅱ) $x=-2y$를 ②에 대입 $y^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, x=\mp\frac{4\sqrt{3}}{3}$(복호동순)

그러므로 $x,\ y$값이 될 수 없는 것은

② $\frac{1}{3}$

16. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x+y$의 값을 a, b라 할 때, $a-b$의 값은? (단, x, y는 양수, $a > b$)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots$ ㉠

$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots$ ㉡

㉡ 식+2×㉠식에 대입하면

$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \ (3x-y)(2x-3y) = 0$

$\therefore\ 3x = y \ \ or \ \ 2x = 3y$

㉮: $3x = y$를 ㉠식에 대입하면

$7x^2 = 7 \ x = 1(x > 0), \quad y = 3$

$\therefore\ x + y = 4$

㉯: $2x = 3y$를 4×㉠식에 대입하면

$7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, \ y = 2(y > 0), \ x = 3$

$\therefore\ x + y = 5$

$a > b$이므로 $a = 5, b = 4$

$\therefore\ a - b = 1$

17. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2-2v=25 \\ v=12 \end{cases}$$

$\therefore\ u=\pm 7,\ v=12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots ㉢ \\ xy=12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x+y=-7 & \cdots ㉣ \\ xy=12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(i) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=3,\ y=4$ 또는 $x=4,\ y=3$

(ii) ㉣, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2+7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=-3,\ y=-4$ 또는 $x=-4,\ y=-3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

18. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$$x^2+(m+2)x-4=0\ ,\ x^2+(m+4)x-6=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0\cdots$㉠

$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0\cdots$㉡

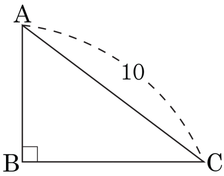
㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0\ \ \therefore\ \ \alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$

$\therefore\ \ m=1$

$\therefore\ \ m+\alpha=2$

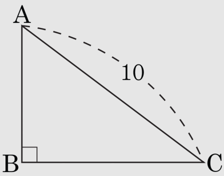
19. 다음 그림의 직각삼각형 ABC 에서 둘레의 길이가 24 이고, 빗변의 길이가 10 이다. 이때, 두 선분 AB 와 BC 의 길이의 곱을 구하면?



① 48 ② 40 ③ 32

④ 18 ⑤ 12

해설



$\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$

둘레의 길이가 24 이므로

$24 = a + b + 10$

$a + b = 14$

직각삼각형이므로,

$a^2 + b^2 = 10^2$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$ab = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)\}$

$= \frac{1}{2}\{14^2 - 10^2\} = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48$

20. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 k_1, k_2 의 두 개다. 이 때, $k_1 k_2$ 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$\begin{cases} x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=-x+k$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=4$

$3x^2-4kx+2k^2-4=0 \quad \cdots ㉢$

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-4)=0$$

$4k^2-6k^2+12=0,\ k^2=6$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ k_1k_2=\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$

21. 두 이차방정식 $ax^2+4x+2=0$, $x^2+ax+1=0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면

$at^2+4t+2=0\cdots$ ㉠

$t^2+at+1=0\cdots$ ㉡

㉠ $-$ ㉡ $\times 2$: $(a-2)t^2+(4-2a)t=0$

$(a-2)t(t-2)=0$

이때, $a=2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a\neq 2$

그런데 $t=0$ 이면 ㉠, ㉡의 해가 존재하지 않으므로 $t=2$

따라서 ㉡에서 $2a+5=0$

$\therefore\ a=-\frac{5}{2}$

22. 0이 아닌 실수 $x,\ y$가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: -1

해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서

$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$

$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$

$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$

$xy-2a,\ y-2ax$는 실수이므로

$xy-2a=0,\ y-2ax=0$

$\therefore\ xy=2a,\ y=2ax$

두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$

$(a \neq 0)$이므로 $x^2=1,\ x=\pm1$

23. 방정식 $2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$의 곱 xy를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$에서

$(x^2+2xy+y^2)+(x^2-4x+4)=0$

$(x+y)^2+(x-2)^2=0$

$x,\ y$가 실수이므로 $x+y=0,\ x-2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=-2$

$\therefore\ xy=-4$

24. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D = 25-8k \geq 0$ 곧, $k \leq \dfrac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

25. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는?

$$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$$

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5개 이상

해설

$$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$$

$(m-4)(n-2)=8$

$8=1\times 8=2\times 4=4\times 2=8\times 1$이므로

$(m,n)=(5,\ 10),\ (6,\ 6),\ (8,\ 4),\ (12,\ 3)$

$\therefore$ 4쌍의 $(m,\ n)$이 존재한다.

26. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30개이고 배점은 80점이다. 문항별 배점은 2점, 3점, 4점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2점 문항 개수를 x, 3점 문항을 y,
4점 문항을 z라 하자

$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠

$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡

㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow$ $y = 40 - 2x$

㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow$ $z = x - 10$

$\therefore$ $x = 10$이면 $z = 0$

$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음

$\therefore$ $x \geq 11$, 최소 11문항

27. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab 의 값은?

$x^3+x^2-5x+3=0,\ x^3+2x^2+ax+b=0, x^2+bx+a=0$

① -1 ② 3 ③ $-\frac{9}{4}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3+x^2-5x+3=0$ 의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3)=0$ ∴ $x=1$ 또는 $x=-3$

(i) 공통근이 $x=1$ 인 경우 나머지 두 방정식에 $x=1$ 을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$ 값은 없다.

(ii) 공통근이 $x=-3$ 인 경우 다른 두 방정식은 $x=-3$ 을 근으로 하므로 $\{-27+18-3a+b=0\}$ ……㉠

$\{9-3b+a=0\}$ ……㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=-\frac{9}{4},\ b=\frac{9}{4},\ ab=-\frac{81}{16}$

28. x에 관한 삼차방정식 $kx^3+(1-2k)x^2+(k-2)x-2k=0$의 근이 모두 실수가 되기 위한 실수 k의 범위를 구하면?

① $0<k\le\frac{1}{2}$ ② $0<k\le 1$ ③ $-\frac{1}{2}<k\le 0$
④ $-\frac{1}{2}<k\le\frac{1}{2}$ ⑤ $0<|k|\le\frac{1}{2}$

해설

준식$=(x-2)(kx^2+x+k)=0$에서
$kx^2+x+k=0$이 실근이어야하므로
$D=1-4k^2\ge 0$,
$k\neq 0$이므로 $0<|k|\le\frac{1}{2}$

29. α, β, γ가 삼차방정식 $x^3 - ax - 3 = 0$의 세 근일 때, $\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를 세 근으로 하는 삼차 방정식을 구하면?

① $3x^3 - ax^2 + 1 = 0$
② $x^3 - ax - 3 = 0$
③ $3x^3 + ax^2 + 1 = 0$
④ $x^3 + ax + 3 = 0$
⑤ $3x^3 - ax^2 - 1 = 0$

해설

$x^3 - ax - 3$
$= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
$= 0$에서
$\alpha + \beta + \gamma = 0,$
$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -a, \ \alpha\beta\gamma = 3$

$$\therefore \ \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2} = -\frac{\gamma}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma},$$

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2} = -\frac{\alpha}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha},$$

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta^2} = -\frac{\beta}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta}$$

따라서, $\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를

세 근으로 하는 방정식은

$$\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)\left(x+\frac{1}{\beta}\right)\left(x+\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$= x^3 + \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2$$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\gamma}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

$$= x^3 + \left(-\frac{a}{3}\right)x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$\therefore \ 3x^3 - ax^2 + 1 = 0$$

30. $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $x^5+y^5=1$　② $x^7+y^7=1$　③ $x^9+y^9=1$

④ $x^{11}+y^{11}=1$　⑤ $x^{13}+y^{13}=1$

해설

$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2-x+1=0$ 의 근이다

$\therefore\ x^2-x+1=0 \Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^3+1=0$

$\therefore\ x^3=y^3=-1,\ x+y=1,\ xy=1$

① : $x^5+y^5=x^3\times x^2+y^3\times y^2=-(x^2+y^2)=-\{(x+y)^2-2xy\}=1$

② : $x^7+y^7=(x^3)^2x+(y^3)^2y=x+y=1$

③ : $x^9+y^9=(x^3)^3+(y^3)^3=-2$

④ : $x^{11}+y^{11}=(x^3)x^2+(y^3)^3y^2=-(x^2+y^2)=1$

⑤ : $x^{13}+y^{13}=(x^3)^4x+(y^3)^4y=x+y=1$

31. A, B 두 사람이 어떤 물건을 3 개월 할부로 공동 구입하였다. 첫달에 A, B 중 한 사람이 다른 사람보다 돈을 많이 지불하였기 때문에 두 번째 달부터는 전달에 많이 지불한 사람은 전달보다 20 % 적은 금액을 지불하고, 적게 지불한 사람은 전 달보다 3000 원 많은 금액을 지불하기로 하였다. 금액을 모두 지불하고보니 A, B는 전체 액수의 반씩을 부담하게 되었다. 이 물건을 사는 데 든 비용은 전부 얼마인가? (단, 두 번째 달의 B의 지불금액은 A의 지불금액보다 6000 원이 많았다.)

① 27000 원 ② 30000 원 ③ 81000 원

④ 162000 원 ⑤ 570000 원

해설

첫달에 A, B가 지불한 금액을 각각 x원, y원이라 하면 각자가 지불한 금액의 총합은 다음과 같다.

$A : x + 0.8x + (0.8x + 3000)$

$B : y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000)$

따라서 $x + 0.8x + (0.8x + 3000) = y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000) \cdots\cdots$ ㉠

$0.8x + 6000 = y + 3000 \cdots\cdots$ ㉡

또, ㉠, ㉡에서 $x = 30000$, $y = 27000$

따라서, A가 지불한 금액은

$30000 + 0.8 \times 30000 + 0.8 \times 30000 + 3000 = 81000$

그런데 물건을 사는 데 든 총 비용은 한 사람이 지불한 금액의 2 배이다.

$\therefore$ (지불한 총 금액)$= 81000 \times 2 = 162000$(원)

32. 각 수가 다른 두 수의 곱이 되는 0이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a = bc,\ b = ca,\ c = ab,$

$abc = (bc)(ca)(ab) = (abc)^2,$

$abc \neq 0, \quad abc = 1,$

$abc = a^2 = b^2 = c^2 = 1$

$a = \pm 1,\ b = \pm 1,\ c = \pm 1$

그러나 $abc = 1$ 이므로, $a,\ b,\ c$ 중에서 -1인 것은 없거나 2개이다.

$\therefore\ (a,\ b,\ c) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$

33. 자연수 n에 대하여 이차방정식 $x^2+nx+2n=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 한다. $\alpha,\ \beta$가 정수일 때, n은?

① 7, 8 ② 8, 9 ③ 9, 10 ④ 9 ⑤ 10

해설

근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-n$, $\alpha\beta=2n$ 이므로
$\alpha\beta=-2(\alpha+\beta)$, $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=0$, $(\alpha+2)(\beta+2)=4$
$\alpha,\ \beta$ 가 정수이므로 $\alpha+2$, $\beta+2$ 도 정수
따라서

$$\begin{cases}\alpha+2=1\\ \beta+2=4\end{cases},\quad \begin{cases}\alpha+2=2\\ \beta+2=2\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha+2=-1\\ \beta+2=-4\end{cases},$$

$$\begin{cases}\alpha+2=-2\\ \beta+2=-2\end{cases}$$ 가 되어

$$\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\end{cases},\ \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases},\ \begin{cases}\alpha=-3\\ \beta=-6\end{cases},\ \begin{cases}\alpha=-4\\ \beta=-4\end{cases}$$

각각의 경우, n 의 값은 $n=-(\alpha+\beta)$ 이므로
$-1,\ 0,\ 9,\ 8$ 의 값을 갖는다.