1. 연립부등식 $3(2x-1) \leq 2(x+6)$, $2(x+6) \leq 5(x+1)$ 에 대하여 해를 구하면?

① $\frac{7}{3} < x < \frac{15}{4}$ ② $\frac{7}{3} \leq x < \frac{15}{4}$ ③ $2 \leq x < 5$
④ $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{7}{3} < x < 5$

해설

$3(2x-1) \leq 2(x+6) \Rightarrow 6x-3 \leq 2x+12$

$\Rightarrow 4x \leq 15 \Rightarrow x \leq \frac{15}{4}$

$2(x+6) \leq 5(x+1) \Rightarrow 2x+12 \leq 5x+5$

$\Rightarrow x \geq \frac{7}{3}$

$\therefore \frac{7}{3} \leq x \leq \frac{15}{4}$

2. 연립부등식 $\frac{1}{2}(x-4) < 0.1x - 0.6 < 0.3x + \frac{1}{5}$ 을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하면?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$\frac{1}{2}(x-4) < 0.1x - 0.6$ 의 양변에 10 을 곱하면 $5(x-4) < x-6$, $5x - 20 < x - 6$, $x < \frac{7}{2}$

$0.1x - 0.6 < 0.3x + \frac{1}{5}$ 의 양변에 10 을 곱하면 $x - 6 < 3x + 2$, $x > -4$

연립부등식의 해는 $-4 < x < \frac{7}{2}$ 이므로 자연수는 1, 2, 3 즉, 3 개이다.

3. 연립부등식 $\begin{cases} 3x - 12 \geq x - 6 \\ 5x - a \leq 4x + 2 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 의 개수가 2 개일 때, 정수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$3x - 12 \geq x - 6$ 을 풀면 $2x \geq 6$, $x \geq 3$
$5x - a \leq 4x + 2$ 를 풀면 $x \leq a + 2$
따라서 $3 \leq x \leq a + 2$ 이고, 만족하는 정수의 개수가 2 개가 되려면
$4 \leq a + 2 < 5$ 이므로 $2 \leq a < 3$, 따라서 정수 a 의 값은 2 이다.

4. 연립부등식 $\begin{cases} 4x-a<5 \\ 2(3-x)\le 7 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \le -7$

해설

$2(3-x)\le 7$

$6-2x\le 7$

$-2x\le 1$

$\therefore\ x\ge -\frac{1}{2}$

$4x-a<5$

$\therefore\ x<\frac{a+5}{4}$

해가 없으려면 $\frac{a+5}{4}\le -\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $a+5\le -2$ 이므로 $a\le -7$ 이다.

5. 연속하는 세 홀수의 합이 45 보다 크고 55 보다 작을 때, 세 홀수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

▷ 정답 : 17

▷ 정답 : 19

해설

연속하는 세 자연수를 $x-2$, x, $x+2$로 각각 두면

$45 < (x-2) + x + (x+2) < 55$

$45 < 3x < 55$

$$\Rightarrow \begin{cases} 45 < 3x \\ 3x < 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 15 \\ x < \dfrac{55}{3} \end{cases}$$

$\therefore \ x = 16, 17, 18$

x 는 홀수이므로 17 이다.

따라서 세 홀수는 15, 17, 19 이다.

6. 규진이는 지금까지 본 세 번의 수학시험에서 각각 92 점, 83 점, 89 점을 받았다. 네 번까지 치른 시험점수의 평균이 85 점 이상 91 점 이하가 되게 하려면 네 번째 시험에서 몇 점 이상을 받아야 하는지 구하여라. (단, 수학시험은 100 점 만점이다.)

▶ 답 : ______ 점

▷ 정답 : 76 점

해설

$$85 \le \frac{92+83+89+x}{4} \le 91$$

$$85 \times 4 \le 92+83+89+x \le 91 \times 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 340 \le 264+x \\ 264+x \le 364 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x \le 264-340 \\ 264+x \le 364 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \ge 76 \\ x \le 100 \end{cases}$$

$$\therefore\ 76 \le x \le 100$$

7. 부등식 $|x-1|<k+1$이 성립하는 실수가 x가 존재하기 위한 실수 k 값의 범위는?

① $k>-1$ ② $k\ge -1$ ③ $k<0$
④ $k<1$ ⑤ $k\le 1$

해설

$|x-1|<k+1$에서 $|x-1|\ge 0$이므로
x가 존재하기 위해서는 $k+1>0$이어야 한다.
따라서 $k>-1$

8. x 에 대한 이차부등식 $ax^2 + 5x + b < 0$ 의 해가 $x < 2$ 또는 $x > 3$ 일 때 상수 $a + b$ 의 값은?

① -7　　② -3　　③ 3　　④ 7　　⑤ 10

해설

해가 $x < 2$ 또는 $x > 3$ 이므로 $a < 0$
해가 $x < 2$ 또는 $x > 3$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은
$(x-2)(x-3) > 0,\ x^2 - 5x + 6 > 0$
양변에 -1을 곱하면
$-x^2 + 5x - 6 < 0$
$\therefore a = -1,\ b = -6$
$a + b = -7$

9. 이차함수 $y = mx^2 + nx + mn + 2$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1 < x < 3$ 일 때, $4mn$ 의 값은? (단, m, n 은 상수)

① -4　② -2　③ -1　④ 2　⑤ 4

해설

$mx^2 + nx + mn + 2 > 0 \cdots$ ㉠의 해가

$-1 < x < 3$ 이므로 $m < 0$ 이고

$m(x+1)(x-3) > 0$

$\therefore mx^2 - 2mx - 3m > 0$

이것이 ㉠과 일치하므로

$n = -2m,\ mn + 2 = -3m$

두 식을 연립하여 풀면 $-2m^2 + 2 = -3m$ 에서

$2m^2 - 3m - 2 = 0$, $(2m+1)(m-2) = 0$

$\therefore m = -\frac{1}{2}$ $(\because m < 0)$

따라서 $n = -2m = 1$ 이므로 $4mn = -2$

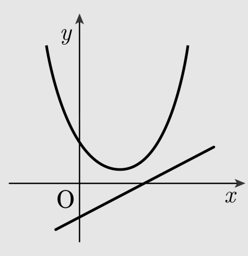
10. 포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있도록 실수 k 의 범위를 구하면?

① $k < -1$ ② $-1 < k < 0$ ③ $k > 0$

④ $0 < k < 1$ ⑤ $k > 1$

해설

포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있으려면



위 그림에서 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$가 항상 성립해야 한다.

즉 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 에서 판별식이 0 보다 작아야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4 - (3 - k) < 0$$

$\therefore\ k < -1$

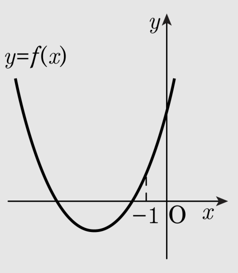
11. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\dfrac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

12. 두 점 $\mathrm{A}(3,4), \mathrm{B}(6,2)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P 의 좌표는?

① $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ② $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

④ $(4,0)$ ⑤ $(5,0)$

해설

x축 위의 점 P 의 좌표를 $(a,0)$ 이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(a-3)^2+(0-4)^2} = \sqrt{a^2-6a+25}$

$\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(a-6)^2+(0-2)^2} = \sqrt{a^2-12a+40}$

조건에서 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 이므로

$\sqrt{a^2-6a+25} = \sqrt{a^2-12a+40}$

양변을 제곱하면 $a^2-6a+25 = a^2-12a+40$

$6a = 15, \quad \therefore a = \frac{5}{2}$

따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

13. 두 점 $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC 의 다른 꼭짓점 C 의 좌표를 구하면?

① $C(1+\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5})$ 또는 $C(1-\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5})$

② $C(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$ 또는 $C(1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5})$

③ $C(1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$ 또는 $C(1-\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$

④ $C(2+\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$ 또는 $C(1-\sqrt{3},\ 0)$

⑤ $C(0,\ 1+\sqrt{3})$ 또는 $(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$

해설

꼭짓점 C를 $(x,\ y)$라 놓자.

$\overline{AB}^2 = (2-0)^2 + (0-2)^2 = 8$

$\overline{BC}^2 = (x-0)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4$

$\overline{CA}^2 = (x-2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4$

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 에서

$8 = x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 - 4x + 4$

$x = y$ 이므로 $2x^2 - 4x - 4 = 0$, $x^2 - 2x - 2 = 0$

$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{3}$

따라서 꼭짓점 C의 좌표는 $C(1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$ 또는 $C(1-\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$

14. 세 점 $\mathrm{A}(6,1)$, $\mathrm{B}(-1,2)$, $\mathrm{C}(2,3)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

① $(2,-1)$ ② $(2,-2)$ ③ $(3,-2)$
④ $(2,2)$ ⑤ $(1,-2)$

해설

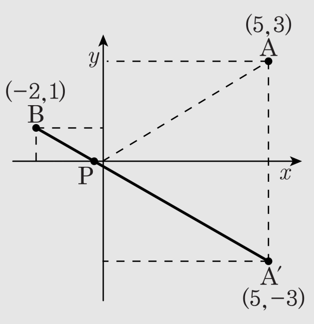
외심의 좌표를 $\mathrm{O}(a,b)$라 하면 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$
즉, $\overline{\mathrm{OA}^2} = \overline{\mathrm{OB}^2}$이므로
$(a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2$
$\therefore\ 7a - b = 16 \cdots$ ㉠
$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OC}}$
즉 $\overline{\mathrm{OA}}^2 = \overline{\mathrm{OC}}^2$이므로
$(a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2$
$\therefore\ 2a - b = 6 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 $a = 2, b = -2$
$\therefore \mathrm{O}(2,-2)$

15. 두 점의 좌표가 A $(5,\ 3)$, B $(-2,\ 1)$ 이고, x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소일 때 점 P 의 좌표는?

① $\mathrm{P}\left(-\frac{3}{4},\ 0\right)$　② $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$　③ $\mathrm{P}\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$
④ $\mathrm{P}\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$　⑤ $\mathrm{P}(1,\ 0)$

해설

A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 라 하면 A′ 는 $(5,\ -3)$ 이다.



$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 이고, $\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은
점 A′ 와 점 B를 이은 선분의 길이와 같다.
직선 A′B 의 방정식은

$y+3=\frac{1-(-3)}{-2-5}(x-5)$, $y=-\frac{4}{7}x-\frac{1}{7}$

이 직선과 x축과의 교점이 점 P이므로
$\therefore\ \mathrm{P}\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$

16. 수직선 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 내분한 점을 C, 외분한 점을 D라 할 때, $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AC}}}+\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}=\dfrac{\boxed{}}{\overline{\mathrm{AB}}}$가 성립한다. $\boxed{}$ 안에 알맞은 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

네 점의 좌표를 각각 A(0), B(b), C(c), D(d)라 하면

$c=\dfrac{mb}{m+n}$, $d=\dfrac{mb}{m-n}$

(∵ A의 좌표가 0)

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=c-0=\dfrac{mb}{m+n}$

$\overline{\mathrm{AD}}=d-0=\dfrac{mb}{m-n}$

$\overline{\mathrm{AB}}=b-0=b$

$\therefore \dfrac{1}{\overline{\mathrm{AC}}}+\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}=\dfrac{m+n}{mb}+\dfrac{m-n}{mb}$

$=\dfrac{2m}{mb}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{2}{\overline{\mathrm{AB}}}$

17. A$(-1,-1)$, B$(5,-2)$, C$(5,5)$를 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD에서 대각선 AC의 중점 M과 나머지 꼭짓점 D의 좌표를 차례로 구하면?

① $(2,2),(-1,6)$　② $(1,1),(-3,4)$　③ $(1,2),(-3,4)$
④ $(3,3),(-1,6)$　⑤ $(1,1),(2,2)$

해설

$\mathrm{M}=\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{-1+5}{2}\right)=(2,\ 2)$

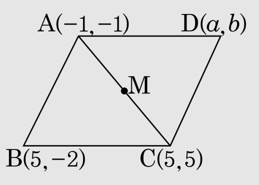
$\overline{\mathrm{BD}}$의 중점은 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점인 M과 같으므로

D$(a,\ b)$라고 하면

$(2,\ 2)\ =\left(\frac{a+5}{2},\ \frac{b-2}{2}\right)$

$\therefore\ a=-1,\ b=6$

$\therefore$ D$(-1,\ 6)$



18. 세 점 A(0, 0), B(1, 0), C(1, 2)에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$라 두면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$= x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+(x-1)^2+(y-2)^2$

$= 3x^2-4x+3y^2-4y+6$

$= 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$

$\therefore\ P(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})$일 때 최소

※ 점 P는 △ABC의 무게중심이 된다.

$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

19. 직선 $(a+2)x - y - a + b = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 $45°$ 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = (a+2)x - a + b$ 에서

기울기$= a + 2 = \tan 45° = 1$

$\therefore\ a = -1$

y 절편 $-a + b = 4$

$\therefore\ b = 3$

$\therefore\ a + b = 2$

20. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $a=2$

21. 세 점 $(0, 2)$, $(3, -3)$, $(-3, a)$가 한 직선 위에 있도록 하는 a의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow \dfrac{-3-2}{3-0} = \dfrac{a-(-3)}{-3-3}$

$\Rightarrow a = 7$

22. 점 $(2,\ 1)$에서 직선 $x-y+3=0$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, H의 좌표는?

① H(3, 0)　　② H(0, 3)　　③ H(0, −3)

④ H(−3, 0)　　⑤ H(0, 0)

해설

점 P(2, 1)을 지나고
직선 $x-y+3=0 \cdots$ ㉠에
수직인 직선 l의 기울기는 -1이므로,
$l\ :\ y-1=-1\cdot(x-2)$,
즉 $l\ :\ x+y-3=0 \cdots$ ㉡
점 H는 직선 ㉠과 직선 l의 교점이므로,
㉠ 과 ㉡ 를 연립하여 풀면 $x=0,\ y=3$
$\therefore$ H(0, 3)

23. 세 직선 $3x+y=7$, $2x+y=k$, $kx-5y=5$이 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에서 만날 때 $a+b$의 최댓값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$3x+y=7\cdots$㉠
$2x+y=k\cdots$㉡
$kx-5y=5\cdots$㉢
㉠과 ㉡의 교점은 $(7-k,\ -14+3k)$이므로
㉢에 대입하면 $k^2+8k-65=0$
$\therefore k=5$ 또는 -13
$\therefore\ \mathrm{P}(a,\ b)=(2,\ 1)$ 또는 $(20,\ -53)$
$\therefore\ a+b$의 최댓값은 $2+1=3$

24. 다음은 점 $A(3,3)$ 에서 직선 $l : x+2y=4$ 까지의 거리를 구하는 과정이다.

> 점 $A(3,3)$ 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 $H(x_1, y_1)$ 이라 하면
> $x_1+2y_1=4 \quad \cdots ①$
> 직선 AH 의 기울기는 (㉮) 이므로
> $\dfrac{y_1-3}{x_1-3} =$ (㉮)
> 즉, $y_1-3=$ (㉮)$(x_1-3) \quad \cdots ②$
> 따라서 $\overline{AH} = \sqrt{(x_1-3)^2+(y_1-3)^2}$
> $=$ (㉯) $|x_1-3|$
> ①, ② 에서 $x_1-3=$ (㉰) 이므로 $\overline{AH} = \sqrt{5}$

위의 ㉮, ㉯, ㉰ 에 알맞은 수를 순서대로 적으면?

① $\frac{1}{2},\ \sqrt{5},\ 1$　② $\frac{1}{2},\ \sqrt{5},\ -1$　③ $2,\ \sqrt{5},\ 1$
④ $2,\ 2\sqrt{5},\ -1$　⑤ $2,\ \sqrt{5},\ -1$

해설

점 A 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을
$H(x_1,\ y_1)$ 라 하면, $x_1+2y_1=4 \cdots ①$
$l : x+2y=4 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{2}x+2$
㉮ : 직선 AH 의 길울기를 m 이라고 하면
직선 AH 와 직선 l 은 직교하므로
$\left(-\frac{1}{2}\right) \times m = -1 \therefore\ m=2$
㉯ : $y_1-3=2(x_1-3) \quad \cdots ②$ 를 대입하면
$\overline{AH} = \sqrt{(x_1-3)^2+(y_1-3)^2}$
$= \sqrt{(x_1-3)^2+\{2(x_1-3)\}^2}$
$= \sqrt{5(x_1-3)^2}$
$= \sqrt{5}|x_1-3|$
㉰ : ①, ② 를 연립하면 $x_1=2,\ y_1=1$ 이므로
$x_1-3=-1$

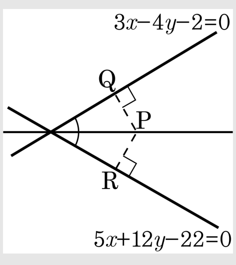
25. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$
즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는
$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면
$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서
기울기가 양이므로
$\therefore\ x-8y+6=0$
$\therefore a+b+c=-1$

26. 두 점 $(-2,\ 1)$, $(6,\ 5)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 7 = 0$

② $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 15 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 5 = 0$

④ $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 15 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$

해설

i) 원의 중심은 두 점의 중점과 같다.

$\Rightarrow \left(\dfrac{-2+6}{2},\ \dfrac{1+5}{2}\right) = (2,\ 3)$

ii) 반지름 길이는 중심과 한 점 사이의 거리와 같 다.

$\Rightarrow \sqrt{(2-6)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{5}$

$\therefore$ 원의 방정식은 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = (2\sqrt{5})^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$

27. 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 A$(-1,\ 0)$ B$(3,\ 2)$ 를 지나는 원의 중심과 반지름의 길이 r 을 구하면?

① $(0,\ 3),\ r = 10$ ② $(0,\ 3),\ r = \sqrt{10}$
③ $(0,\ 2),\ r = 10$ ④ $(0,\ 2),\ r = \sqrt{10}$
⑤ $(0,\ -3),\ r = 10$

해설

중심이 y 축에 있는 원의 방정식은
$x^2 + (y-a)^2 = r^2 \quad \cdots$ ① 이다.
$(-1, 0)$ 을 $(3, 2)$ 를 ① 에 각각 대입하면,
$a^2 = r^2 - 1 \quad \cdots$ ②
$(a-2)^2 = r^2 - 9 \quad \cdots$ ③
③ 을 ② 에 대입하면,
$a^2 = (a-2)^2 + 8$
$\Rightarrow \quad a = 3 \quad r = \sqrt{10}$
$\therefore$ 중심은 $(0,\ 3)$, 반지름은 $\sqrt{10}$ 이다.

28. 좌표평면 위에 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=5$ 이 있다.
이 원 밖의 임의의 한 점에서 두 접선을 그었을 때, 두 접선이 직교하는 점들의 자취방정식의 자취의 길이는?

① π ② 5π ③ $\sqrt{10}\pi$
④ $2\sqrt{10}\pi$ ⑤ 10π

해설

주어진 원은 중심이 $(-1,-2)$ 이고 반지름이 $\sqrt{5}$ 인 원이다.
원 밖의 한 점 $P(a,b)$ 에서 원에 그은 접선이 서로 수직이려면 원의 중심에서 P 까지의
거리가 $\sqrt{10}$ 이어야 한다.
따라서 두 접선이 직교하는 점들의 자취의 방정식은 $(x+1)^2+(y+2)^2=10$

29. 두 원 $x^2+y^2-2x+ky-4=0$, $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 의 공통현의 방정식이 직선 $y=x-1$ 과 수직일 때, k 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

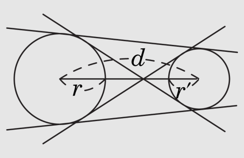
두 원의 공통현의 방정식은
$x^2+y^2-2x+ky-4-(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$
$2x+(k+2)y-8=0 \cdots$ ㉠
직선 ㉠과 직선 $y=x-1$,
즉 $x-y-1=0$ 이 수직이므로
$2 \cdot 1+(k+2)(-1)=0 \quad \therefore k=0$

30. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 4 개

해설



먼저 두 원의 반지름의 길이의 합 $r + r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하여
두 원의 위치관계를 파악한다.
두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면
$r + r' = 5, r \sim r' = 1$ $d = 9$ 이므로
$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

31. $x^2+y^2=1$일 때, $2x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

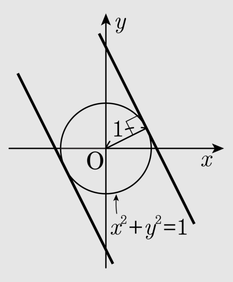
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x+y=k$라 하면 $y=-2x+k$에서 k는 기울기가 -2인 직선의 y절편이다.
주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로 점과 직선사이의 거리에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} \le 1$

$\therefore\ -5 \le k \le \sqrt{5}$

32. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

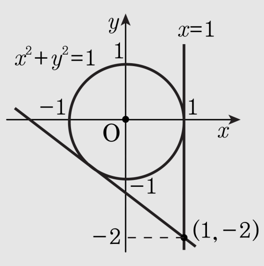
$\frac{|a|}{5} < 2$, $|a| < 10$, $-10 < a < 10$

$a = -9, -8, -7, -6, \cdots, 6, 7, 8, 9$ $\therefore$ 19 개

33. 원 밖의 점 $(1,-2)$ 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$ 또는 $x=1$　② $y=-\frac{2}{3}x-3$ 또는 $x=3$
③ $y=-x-\frac{3}{4}$ 또는 $x=-2$　④ $y=-\frac{9}{5}x-\frac{5}{9}$ 또는 $x=-6$
⑤ $y=-4x-3$ 또는 $x=4$

해설



구하는 접선의 기울기를 m 이라고 하면
점 $(1,-2)$ 를 지나는 접선의 방정식은
$y+2=m(x-1)$
$\therefore mx-y-m-2=0$
이 직선이 중심이 $(0,0)$ 이고
반지름의 길이가 1 인 원에 접하므로
$\frac{|-m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,$
$|m+2|=\sqrt{m^2+1}$
이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
$m^2+4m+4=m^2+1, 4m=-3$
$\therefore m=-\frac{3}{4}$
따라서, 구하는 접선의 방정식은
$y+2=-\frac{3}{4}(x-1)\ \therefore y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$
그런데 다음 그림에서 보듯이 직선 $x=1$ 도
점 $(1,-2)$ 를 지나고
원 $x^2+y^2=1$ 에 접하는 직선임을 알 수 있다.
그러므로 구하는 접선의 방정식은
$y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$ 또는 $x=1$

34. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(8, 0)$, $\mathrm{B}(0, 6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle \mathrm{AOB} = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{\mathrm{AB}} = 10$ 이고 원의 중심은 $\mathrm{C}(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
$a = -8,\ b = -6,\ c = 0$
$\therefore abc = 0$

35. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x| \cdots$ ㉠

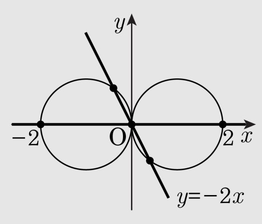
$x^2+y^2=2|x+y| \cdots$ ㉡

㉠) 과 ㉡) 에서 $2|x|=2|x+y|$

$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x \cdots$ ㉢

㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.



실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0)$, $(\pm 2,\ 0)$,

$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)

36. 연립부등식 $a+1<\frac{x}{2}<\frac{a+11}{6}$ 의 해가 $-2<x<3$일 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a+1<\frac{x}{2}$, $2a+2<x$

$\frac{x}{2}<\frac{a+11}{6}$, $x<\frac{a+11}{3}$

$2a+2<x<\frac{a+11}{3}$ 과 $-2<x<3$이 같으므로

$2a+2=-2$

$\therefore\ a=-2$

37. 한 권에 500 원 하는 공책과 800 원 하는 연습장을 합하여 13 권을 사는데 총 금액이 7500 원 이상 8000 원 미만이 되게하려면 500 원 하는 공책을 몇 권을 살 수 있는지 구하여라.

▶ 답: ______ 권

▷ 정답: 9권

해설

500 원 하는 공책은 x권 , 800 원 하는 연습장은 $(13-x)$ 권

$7500 \le 500x + 800(13-x) < 8000$

$7500 \le 500x + 10400 - 800x < 8000$

$7500 \le -300x + 10400 < 8000$

$-29 \le -3x < -24$

$8 < x \le \frac{29}{3}$

그러므로 9권

38. 모든 실수 x에 대하여, 부등식 $k\{x^2-(k-2)x-3(k-2)\} > 0$가 성립되게 하는 상수 k값의 범위를 구하면?

① $0 < k < 2$　② $1 < k < 2$　③ $1 < k < 4$
④ $-1 < k < 3$　⑤ $-2 < k < -1$

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$k > 0 \cdots$ ①
$x^2 - (k-2)x - 3(k-2) > 0$이 항상 성립하려면
$D = (k-2)^2 + 12(k-2) < 0$에서
$(k-2)(k+10) < 0$
$\therefore\ -10 < k < 2 \cdots$ ②
①, ②에서 $0 < k < 2$

39. 이차방정식 $x^2+(a-b)x+ab=1$이 a의 어떤 실수값에 대해서도 항상 실근을 갖도록 b의 범위를 정하면?

① $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{2}$　　② $b \le -\frac{\sqrt{2}}{2},\ b \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $-\frac{\sqrt{2}}{3} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{3}$　　④ $b \le -\frac{\sqrt{2}}{3},\ b \ge \frac{\sqrt{2}}{3}$

⑤ $b \le -2,\ b \ge 2$

해설

$x^2+(a-b)x+ab-1=0$에서

$D=(a-b)^2-4(ab-1)\ge 0$

이 식을 a에 관해서 정리하면, $a^2-6ba+b^2+4\ge 0$이

부등식이 a에 관계없이 항상 성립하기 위한 조건은 $\frac{D'}{4} \le 0$

이므로

$\frac{D'}{4}=(3b)^2-(b^2+4)\le 0$

$\therefore\ 2b^2-1\le 0$에서

$(\sqrt{2}b+1)(\sqrt{2}b-1)\le 0$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} \le b \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

40. 부등식 $\left|\frac{(1-a)x}{x^2+1}\right| < 1$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, a의 범위를 구하면?

① $0 < a \le 3$　　② $a < -1$ 또는 $a > 3$

③ $-1 < a < 3$　　④ $-1 \le a \le 3$

⑤ $-3 < a < 1$

해설

$-1 < \frac{(1-a)x}{x^2+1} < 1$

$\Rightarrow$ i) $-x^2-1 < (1-a)x$,

ii) $(1-a)x < x^2+1$

$\Rightarrow$ i) $x^2+(1-a)x+1 > 0$,

ii) $x^2+(a-1)x+1 > 0$

둘 모두 판별식이 0보다 작아야 한다.

$D = (1-a)^2 - 4 < 0$

$D = (a-1)^2 - 4 < 0$

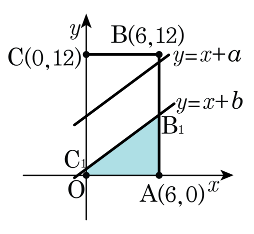
$\Rightarrow$ $(a-3)(a+1) < 0$

$\Rightarrow$ $-1 < a < 3$

$-1 < a < 3$

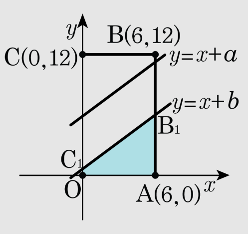
$\therefore$ $-1 < a < 3$

41. 네 점 O(0, 0), A(6, 0), B(6, 12), C(0, 12)를 꼭지점으로 하는 사각형 OABC가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y = x + a$, $y = x + b$가 사각형 OABC의 넓이를 삼등분할 때, ab의 값은?



① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설



사각형 OABC의 넓이가 72이므로

사각형 OAB_1C_1의 넓이는 24이다.

$\frac{1}{2}(b+6+b)\times 6 = 24$이므로 $b = 1$

같은 방법으로 $a = 5$

$\therefore\ ab = 5$

42. 원점과 직선 $2x-y-5+k(x+2y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라고 할 때, $\frac{1}{f(k)^2}$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

해설

점 $P(x_1,\ y_1)$ 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

원점과 직선$(2+k)x+(2k-1)y-5=0$ 사이의 거리

$f(k)$ 는 $f(k)=\frac{|-5|}{\sqrt{(2+k)^2+(2k-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5(1+k^2)}}$

$\therefore\ \frac{1}{\{f(k)\}^2}=\frac{k^2+1}{5}$

따라서, $k=0$ 일 때, 최솟값$\frac{1}{\{f(0)\}^2}=\frac{1}{5}$ 이다.

43. 두 원 $(x-a)^2+y^2=4$, $x^2+(y-b)^2=9$가 서로 외접할 때, 점 $(a,\ b)$가 그리는 도형에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 이 도형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 12이다.

② 이 도형에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $6\sqrt{3}$이다.

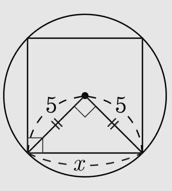
③ 두 종류의 두형이 나타난다.

④ 이 도형의 길이는 10π이다.

⑤ 원점을 지나는 원이다.

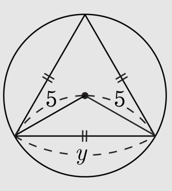
해설

두 원이 서로 외접할 조건은 두 원의 중심을 연결한 선분의 길이가 두 원의 반지름들의 합과 같으면 된다.
원 $(x-a)^2+y^2=4$에서 중심은 $(a,\ 0)$, 반지름은 2이고, 원 $x^2+(y-b)^2=9$에서 중심은 $(0,\ b)$, 반지름은 3이다.
따라서, $(a,\ 0)$과 $(0,\ b)$ 사이의 거리가 5가 되므로 $\sqrt{a^2+b^2}=5$
$\therefore a^2+b^2=25$
그러므로 구하려는 자취는 $x^2+y^2=25$
① 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를
x라 하면



$2x^2=10 \therefore\ x=5\sqrt{2}$

② 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이를
y라 하면



$y=\frac{5}{2}\sqrt{3}\times 2=5\sqrt{3}$

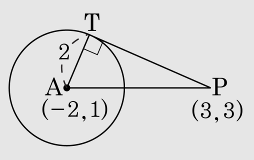
$\therefore\ y=5\sqrt{3}$ 이다.

44. 점 (3, 3) 에서 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5　　② $\sqrt{26}$　　③ 6　　④ $\sqrt{37}$　　⑤ 7

해설

준식에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=2^2$ 이므로
중심이 (−2, 1) 반지름의 길이가 2 인 원이다.



$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PT}}^2 &= \overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{AT}}^2\\ &=(3+2)^2+(3-1)^2-2^2\\ &=25\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PT}}=5$