

1. 연립부등식 $3(2x-1) \leq 2(x+6)$, $2(x+6) \leq 5(x+1)$ 에 대하여 해를 구하면?

① $\frac{7}{3} < x < \frac{15}{4}$
④ $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{15}{4}$

② $\frac{7}{3} \leq x < \frac{15}{4}$
⑤ $\frac{7}{3} < x < 5$

③ $2 \leq x < 5$

해설

$$3(2x-1) \leq 2(x+6) \Rightarrow 6x-3 \leq 2x+12$$

$$\Rightarrow 4x \leq 15 \Rightarrow x \leq \frac{15}{4}$$

$$2(x+6) \leq 5(x+1) \Rightarrow 2x+12 \leq 5x+5$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{7}{3}$$

$$\therefore \frac{7}{3} \leq x \leq \frac{15}{4}$$

2. 연립부등식 $\frac{1}{2}(x-4) < 0.1x - 0.6 < 0.3x + \frac{1}{5}$ 을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하면?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$\frac{1}{2}(x-4) < 0.1x - 0.6$ 의 양변에 10 을 곱하면 $5(x-4) < x-6$,

$$5x - 20 < x - 6, x < \frac{7}{2}$$

$0.1x - 0.6 < 0.3x + \frac{1}{5}$ 의 양변에 10 을 곱하면 $x-6 < 3x+2, x > -4$

연립부등식의 해는 $-4 < x < \frac{7}{2}$ 이므로 자연수는 1, 2, 3 즉, 3 개이다.

3. 연립부등식 $\begin{cases} 3x - 12 \geq x - 6 \\ 5x - a \leq 4x + 2 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 의 개수가 2 개일 때, 정수 a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$3x - 12 \geq x - 6$ 을 풀면 $2x \geq 6$, $x \geq 3$

$5x - a \leq 4x + 2$ 를 풀면 $x \leq a + 2$

따라서 $3 \leq x \leq a + 2$ 이고, 만족하는 정수의 개수가 2 개가 되려면

$4 \leq a + 2 < 5$ 이므로 $2 \leq a < 3$, 따라서 정수 a 의 값은 2 이다.

4. 연립부등식 $\begin{cases} 4x - a < 5 \\ 2(3 - x) \leq 7 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \leq -7$

해설

$$2(3 - x) \leq 7$$

$$6 - 2x \leq 7$$

$$-2x \leq 1$$

$$\therefore x \geq -\frac{1}{2}$$

$$4x - a < 5$$

$$\therefore x < \frac{a+5}{4}$$

해가 없으려면 $\frac{a+5}{4} \leq -\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $a+5 \leq -2$ 이므로 $a \leq -7$ 이다.

5. 연속하는 세 홀수의 합이 45 보다 크고 55 보다 작을 때, 세 홀수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

▷ 정답 : 17

▷ 정답 : 19

해설

연속하는 세 자연수를 $x-2$, x , $x+2$ 로 각각 두면

$$45 < (x-2) + x + (x+2) < 55$$

$$45 < 3x < 55$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 45 < 3x \\ 3x < 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 15 \\ x < \frac{55}{3} \end{cases}$$

$$\therefore x = 16, 17, 18$$

x 는 홀수이므로 17 이다.

따라서 세 홀수는 15, 17, 19 이다.

6. 규진이는 지금까지 본 세 번의 수학시험에서 각각 92 점, 83 점, 89 점
을 받았다. 네 번까지 치른 시험점수의 평균이 85 점 이상 91 점 이하가
되게 하려면 네 번째 시험에서 몇 점 이상을 받아야 하는지 구하여라.
(단, 수학시험은 100 점 만점이다.)

▶ 답 : 점

▷ 정답 : 76점

해설

$$85 \leq \frac{92 + 83 + 89 + x}{4} \leq 91$$

$$85 \times 4 \leq 92 + 83 + 89 + x \leq 91 \times 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 340 \leq 264 + x \\ 264 + x \leq 364 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x \leq 264 - 340 \\ 264 + x \leq 364 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 76 \\ x \leq 100 \end{cases}$$

$$\therefore 76 \leq x \leq 100$$

7. 부등식 $|x - 1| < k + 1$ 이 성립하는 실수가 x 가 존재하기 위한 실수 k 값의 범위는?

① $k > -1$

② $k \geq -1$

③ $k < 0$

④ $k < 1$

⑤ $k \leq 1$

해설

$|x - 1| < k + 1$ 에서 $|x - 1| \geq 0$ 이므로
 x 가 존재하기 위해서는 $k + 1 > 0$ 이어야 한다.
따라서 $k > -1$

8. x 에 대한 이차부등식 $ax^2 + 5x + b < 0$ 의 해가 $x < 2$ 또는 $x > 3$ 일 때 상수 $a + b$ 의 값은?

① -7

② -3

③ 3

④ 7

⑤ 10

해설

해가 $x < 2$ 또는 $x > 3$ 이므로 $a < 0$

해가 $x < 2$ 또는 $x > 3$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은

$$(x-2)(x-3) > 0, x^2 - 5x + 6 > 0$$

양변에 -1 을 곱하면

$$-x^2 + 5x - 6 < 0$$

$$\therefore a = -1, b = -6$$

$$a + b = -7$$

9. 이차함수 $y = mx^2 + nx + mn + 2$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1 < x < 3$ 일 때, $4mn$ 의 값은? (단, m, n 은 상수)

① -4

② -2

③ -1

④ 2

⑤ 4

해설

$mx^2 + nx + mn + 2 > 0 \cdots \textcircled{1}$ 의 해가

$-1 < x < 3$ 이므로 $m < 0$ 이고

$$m(x+1)(x-3) > 0$$

$$\therefore mx^2 - 2mx - 3m > 0$$

이것이 $\textcircled{1}$ 과 일치하므로

$$n = -2m, mn + 2 = -3m$$

두 식을 연립하여 풀면 $-2m^2 + 2 = -3m$ 에서

$$2m^2 - 3m - 2 = 0, (2m+1)(m-2) = 0$$

$$\therefore m = -\frac{1}{2} (\because m < 0)$$

따라서 $n = -2m = 1$ 이므로 $4mn = -2$

10. 포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있도록 실수 k 의 범위를 구하면?

① $k < -1$

② $-1 < k < 0$

③ $k > 0$

④ $0 < k < 1$

⑤ $k > 1$

해설

포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있으려면

위 그림에서 모든 실수 x 에 대하여

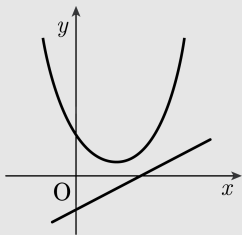
부등식 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 가 항상 성립해야 한다.

즉 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 에서

판별식이 0 보다 작아야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4 - (3 - k) < 0$$

$$\therefore k < -1$$



11. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 6 - k = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

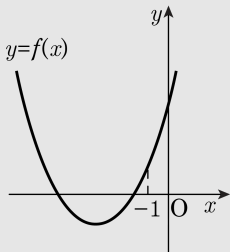
▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x) = x^2 - 2kx + 6 - k$ 라 하면

방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4} = (-k)^2 - (6 - k) > 0$ 에서

$$k^2 + k - 6 > 0, (k + 3)(k - 2) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 2$$

(ii) $f(-1) = 1 + 2k + 6 - k > 0$ 에서 $k > -7$

(iii) $-\frac{2k}{2} < -1$ 에서 $k < -1$

이상에서 $-7 < k < -1$

따라서 정수 k 는 $-6, -5, -4$ 의 3개다.

12. 두 점 A(3, 4), B(6, 2) 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표는?

① $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

② $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

③ $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

④ (4, 0)

⑤ (5, 0)

해설

x 축 위의 점 P의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면

$$\overline{AP} = \sqrt{(a-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 25}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(a-6)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{a^2 - 12a + 40}$$

조건에서 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{a^2 - 6a + 25} = \sqrt{a^2 - 12a + 40}$$

양변을 제곱하면 $a^2 - 6a + 25 = a^2 - 12a + 40$

$$6a = 15, \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

13. 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC 의 다른 꼭짓점 C 의 좌표를 구하면?

- ① $C(1 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$ 또는 $C(1 - \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5})$
- ② $C(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5})$
- ③ $C(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$
- ④ $C(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 - \sqrt{3}, 0)$
- ⑤ $C(0, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$

해설

꼭짓점 C 를 (x, y) 라 놓자.

$$\overline{AB}^2 = (2 - 0)^2 + (0 - 2)^2 = 8$$

$$\overline{BC}^2 = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4$$

$$\overline{CA}^2 = (x - 2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 \text{ 에서}$$

$$8 = x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 - 4x + 4$$

$$x = y \text{ 이므로 } 2x^2 - 4x - 4 = 0, x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3}$$

따라서 꼭짓점 C 의 좌표는 $C(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$

14. 세 점 A(6,1), B(-1,2), C(2,3)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

① (2, -1)

② (2, -2)

③ (3, -2)

④ (2, 2)

⑤ (1, -2)

해설

외심의 좌표를 $O(a, b)$ 라 하면 $\overline{OA} = \overline{OB}$

즉, $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$ 이므로

$$(a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2$$

$$\therefore 7a - b = 16 \cdots \textcircled{㉠}$$

$\overline{OA} = \overline{OC}$

즉 $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2$ 이므로

$$(a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2$$

$$\therefore 2a - b = 6 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 $a = 2, b = -2$

$$\therefore O(2, -2)$$

15. 두 점의 좌표가 A (5, 3), B (-2, 1)이고, x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소일 때 점 P 의 좌표는?

① $P\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

② $P\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

③ $P\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

④ $P\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

⑤ $P(1, 0)$

해설

A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 라 하면 A' 는 (5, -3) 이다.

$\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$ 이고, $\overline{A'P} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

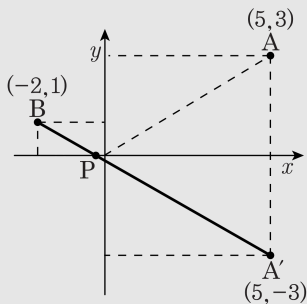
점 A' 와 점 B를 이은 선분의 길이와 같다.

직선 $A'B$ 의 방정식은

$$y + 3 = \frac{1 - (-3)}{-2 - 5}(x - 5), y = -\frac{4}{7}x - \frac{1}{7}$$

이 직선과 x 축과의 교점이 점 P이므로

$$\therefore P\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$$



16. 수직선 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분한 점을 C, 외분한 점을 D라 할 때, $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{\boxed{}}{AB}$ 가 성립한다. $\boxed{}$ 안에 알맞은 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

해설

네 점의 좌표를 각각 A(0), B(b), C(c), D(d)라 하면

$$c = \frac{mb}{m+n}, d = \frac{mb}{m-n}$$

($\because$ A의 좌표가 0)

$$\therefore \overline{AC} = c - 0 = \frac{mb}{m+n}$$

$$\overline{AD} = d - 0 = \frac{mb}{m-n}$$

$$\overline{AB} = b - 0 = b$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} &= \frac{m+n}{mb} + \frac{m-n}{mb} \\ &= \frac{2m}{mb} = \frac{2}{b} = \frac{2}{AB} \end{aligned}$$

17. $A(-1, -1), B(5, -2), C(5, 5)$ 를 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD에서 대각선 AC의 중점 M과 나머지 꼭짓점 D의 좌표를 차례로 구하면?

- ① $(2, 2), (-1, 6)$ ② $(1, 1), (-3, 4)$ ③ $(1, 2), (-3, 4)$
④ $(3, 3), (-1, 6)$ ⑤ $(1, 1), (2, 2)$

해설

$$M = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = (2, 2)$$

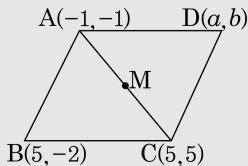
$\overline{BD}$ 의 중점은 $\overline{AC}$ 의 중점인 M과 같으므로

$D(a, b)$ 라고 하면

$$(2, 2) = \left(\frac{a+5}{2}, \frac{b-2}{2} \right)$$

$$\therefore a = -1, b = 6$$

$$\therefore D(-1, 6)$$



18. 세 점 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$ 에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P 의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

② $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$

③ $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

④ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

⑤ $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x, y)$ 라 두면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$= 3x^2 - 4x + 3y^2 - 4y + 6$$

$$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}$$

$\therefore P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소

※ 점 P 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이 된다.

$$\left(\frac{0+1+1}{3}, \frac{0+0+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

19. 직선 $(a+2)x - y - a + b = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 45° 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답:

▶ 정답: 2

해설

$$\begin{aligned} & y = (a+2)x - a + b \text{ 에서} \\ & \text{기울기} = a+2 = \tan 45^\circ = 1 \\ & \therefore a = -1 \\ & y \text{ 절편 } -a + b = 4 \\ & \therefore b = 3 \\ & \therefore a + b = 2 \end{aligned}$$

20. 직선 $x + ay - 1 = 0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1, 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$$\therefore \text{삼각형의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$$

21. 세 점 $(0, 2)$, $(3, -3)$, $(-3, a)$ 가 한 직선 위에 있도록 하는 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$$\Rightarrow \frac{-3-2}{3-0} = \frac{a-(-3)}{-3-3}$$

$$\Rightarrow a = 7$$

22. 점 (2, 1)에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 할 때, H의 좌표는?

① H(3, 0)

② H(0, 3)

③ H(0, -3)

④ H(-3, 0)

⑤ H(0, 0)

해설

점 P(2, 1)을 지나고

직선 $x - y + 3 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$ 에

수직인 직선 l 의 기울기는 -1 이므로,

$$l : y - 1 = -1 \cdot (x - 2),$$

$$\text{즉 } l : x + y - 3 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

점 H는 직선 $\textcircled{㉠}$ 과 직선 l 의 교점이므로,

$\textcircled{㉠}$ 과 $\textcircled{㉡}$ 를 연립하여 풀면 $x = 0, y = 3$

$$\therefore H(0, 3)$$

23. 세 직선 $3x + y = 7$, $2x + y = k$, $kx - 5y = 5$ 이 한 점 $P(a, b)$ 에서 만날 때 $a + b$ 의 최댓값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$3x + y = 7 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2x + y = k \cdots \textcircled{㉡}$$

$$kx - 5y = 5 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠과 ㉡의 교점은 $(7 - k, -14 + 3k)$ 이므로

㉢에 대입하면 $k^2 + 8k - 65 = 0$

$$\therefore k = 5 \text{ 또는 } -13$$

$$\therefore P(a, b) = (2, 1) \text{ 또는 } (20, -53)$$

$$\therefore a + b \text{의 최댓값은 } 2 + 1 = 3$$

24. 다음은 점 A(3,3) 에서 직선 $l: x + 2y = 4$ 까지의 거리를 구하는 과정이다.

점 A(3,3) 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 $H(x_1, y_1)$ 이라 하면

$$x_1 + 2y_1 = 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

직선 AH 의 기울기는 (㉠) 이므로

$$\frac{y_1 - 3}{x_1 - 3} = (\textcircled{㉠})$$

$$\text{즉, } y_1 - 3 = (\textcircled{㉠})(x_1 - 3) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{따라서 } \overline{AH} = \sqrt{(x_1 - 3)^2 + (y_1 - 3)^2}$$

$$= (\textcircled{㉡}) |x_1 - 3|$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } x_1 - 3 = (\textcircled{㉢}) \text{ 이므로 } \overline{AH} = \sqrt{5}$$

위

의 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 수를 순서대로 적으면?

- ① $\frac{1}{2}, \sqrt{5}, 1$ ② $\frac{1}{2}, \sqrt{5}, -1$ ③ $2, \sqrt{5}, 1$
 ④ $2, 2\sqrt{5}, -1$ ⑤ $2, \sqrt{5}, -1$

해설

점 A에서 직선 l 에 내린 수선의 발을

$H(x_1, y_1)$ 라 하면, $x_1 + 2y_1 = 4 \cdots \textcircled{1}$

$$l: x + 2y = 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$$

㉠: 직선 AH 의 기울기를 m 이라고 하면

직선 AH 와 직선 l 은 직교하므로

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \times m = -1 \therefore m = 2$$

㉡: $y_1 - 3 = 2(x_1 - 3) \cdots \textcircled{2}$ 를 대입하면

$$\overline{AH} = \sqrt{(x_1 - 3)^2 + (y_1 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - 3)^2 + \{2(x_1 - 3)\}^2}$$

$$= \sqrt{5(x_1 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{5} |x_1 - 3|$$

㉢: ①, ②를 연립하면 $x_1 = 2, y_1 = 1$ 이므로

$$x_1 - 3 = -1$$

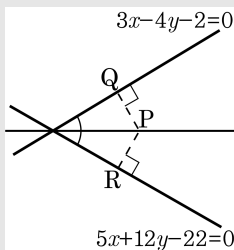
25. 두 직선 $3x - 4y - 2 = 0$, $5x + 12y - 22 = 0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax + by + c = 0$ 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X - 4Y - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5X + 12Y - 22|}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$13(3X - 4Y - 2) = \pm 5(5X + 12Y - 22)$$

즉, $13(3X - 4Y - 2) = 5(5X + 12Y - 22)$ 또는

$13(3X - 4Y - 2) = -5(5X + 12Y - 22)$ 정리하면

$x - 8y + 6 = 0$ 또는 $8x + y - 17 = 0$ 에서

기울기가 양이므로

$$\therefore x - 8y + 6 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -1$$

26. 두 점 $(-2, 1)$, $(6, 5)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 7 = 0$

② $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 15 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 5 = 0$

④ $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 15 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$

해설

i) 원의 중심은 두 점의 중점과 같다.

$$\Rightarrow \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{1+5}{2} \right) = (2, 3)$$

ii) 반지름 길이는 중심과 한 점 사이의 거리와 같다.

$$\Rightarrow \sqrt{(2-6)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \text{원의 방정식은 } (x-2)^2 + (y-3)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$$

27. 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 $A(-1, 0)$ $B(3, 2)$ 를 지나는 원의 중심과 반지름의 길이 r 을 구하면?

① $(0, 3), r = 10$

② $(0, 3), r = \sqrt{10}$

③ $(0, 2), r = 10$

④ $(0, 2), r = \sqrt{10}$

⑤ $(0, -3), r = 10$

해설

중심이 y 축에 있는 원의 방정식은

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2 \quad \dots \text{① 이다.}$$

$(-1, 0)$ 을 $(3, 2)$ 를 ① 에 각각 대입하면,

$$a^2 = r^2 - 1 \quad \dots \text{②}$$

$$(a - 2)^2 = r^2 - 9 \quad \dots \text{③}$$

③ 을 ② 에 대입하면,

$$a^2 = (a - 2)^2 + 8$$

$$\Rightarrow a = 3 \quad r = \sqrt{10}$$

$\therefore$ 중심은 $(0, 3)$, 반지름은 $\sqrt{10}$ 이다.

28. 좌표평면 위에 원 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$ 이 있다.
이 원 밖의 임의의 한 점에서 두 접선을 그었을 때, 두 접선이 직교하는 점들의 자취방정식의 자취의 길이는?

① π

② 5π

③ $\sqrt{10}\pi$

④ $2\sqrt{10}\pi$

⑤ 10π

해설

주어진 원은 중심이 $(-1, -2)$ 이고 반지름이 $\sqrt{5}$ 인 원이다.

원 밖의 한 점 $P(a, b)$ 에서 원에 그은 접선이 서로 수직이려면
원의 중심에서 P 까지의
거리가 $\sqrt{10}$ 이어야 한다.

따라서 두 접선이 직교하는 점들의 자취의 방정식은 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$

29. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x + ky - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 의 공통현의 방정식이 직선 $y = x - 1$ 과 수직일 때, k 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x + ky - 4 - (x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4) = 0$$

$$2x + (k + 2)y - 8 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 과 직선 $y = x - 1$,

즉 $x - y - 1 = 0$ 이 수직이므로

$$2 \cdot 1 + (k + 2)(-1) = 0 \quad \therefore k = 0$$

30. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

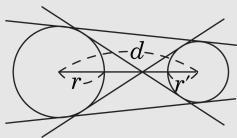
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r - r'$, 중심거리 d 를 구하
여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

$r + r' = 5, r - r' = 1, d = 9$ 이므로

$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두
4 개



31. $x^2 + y^2 = 1$ 일 때, $2x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

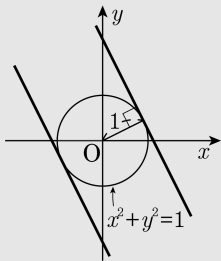
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x + y = k$ 라 하면 $y = -2x + k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.

주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로

점과 직선사이의 거리에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} \leq 1$

$\therefore -5 \leq k \leq \sqrt{5}$

32. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$$\frac{|a|}{5} < 2, |a| < 10, -10 < a < 10$$

$$a = -9, -8, -7, -6, \dots, 6, 7, 8, 9 \therefore 19 \text{ 개}$$

33. 원 밖의 점 $(1, -2)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ 또는 $x = 1$

② $y = -\frac{2}{3}x - 3$ 또는 $x = 3$

③ $y = -x - \frac{3}{4}$ 또는 $x = -2$

④ $y = -\frac{9}{5}x - \frac{5}{9}$ 또는 $x = -6$

⑤ $y = -4x - 3$ 또는 $x = 4$

해설

구하는 접선의 기울기를 m 이라고 하면
점 $(1, -2)$ 를 지나는 접선의 방정식은
 $y + 2 = m(x - 1)$

$$\therefore mx - y - m - 2 = 0$$

이 직선이 중심이 $(0, 0)$ 이고

반지름의 길이가 1 인 원에 접하므로

$$\frac{|-m-2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1,$$

$$|m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2 + 4m + 4 = m^2 + 1, 4m = -3$$

$$\therefore m = -\frac{3}{4}$$

따라서, 구하는 접선의 방정식은

$$y + 2 = -\frac{3}{4}(x - 1) \therefore y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

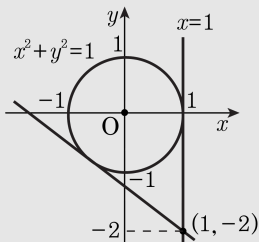
그런데 다음 그림에서 보듯이 직선 $x = 1$ 도

점 $(1, -2)$ 를 지나고

원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 직선임을 알 수 있다.

그러므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \text{ 또는 } x = 1$$



34. 좌표평면 위의 두 점 $A(8,0)$, $B(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.

$\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

$a = -8, b = -6, c = 0$

$\therefore abc = 0$

35. 이차방정식 $x^2 + y^2 = 2|x|$ 과 $x^2 + y^2 = 2|x+y|$ 의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답: 5 개

해설

$$x^2 + y^2 = 2|x| \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + y^2 = 2|x+y| \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{과 } \textcircled{㉡} \text{에서 } 2|x| = 2|x+y|$$

$$\therefore x+y = \pm x$$

$$\therefore y = 0 \text{ 또는 } y = -2x \cdots \textcircled{㉢}$$

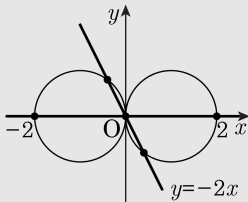
$\textcircled{㉠}$ 과 $\textcircled{㉢}$ 의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.

실제로, 교점을 구하면

$$(0, 0), (\pm 2, 0),$$

$$\left(\pm \frac{2}{5}, \mp \frac{4}{5}\right)$$

(복부호동순)



36. 연립부등식 $a + 1 < \frac{x}{2} < \frac{a + 11}{6}$ 의 해가 $-2 < x < 3$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 2

해설

$$a + 1 < \frac{x}{2}, 2a + 2 < x$$

$$\frac{x}{2} < \frac{a + 11}{6}, x < \frac{a + 11}{3}$$

$$2a + 2 < x < \frac{a + 11}{3} \text{ 과 } -2 < x < 3 \text{ 이 같으므로}$$

$$2a + 2 = -2$$

$$\therefore a = -2$$

37. 한 권에 500 원 하는 공책과 800 원 하는 연습장을 합하여 13 권을 사는데 총 금액이 7500 원 이상 8000 원 미만이 되게하려면 500 원 하는 공책을 몇 권을 살 수 있는지 구하여라.

▶ 답: 권

▷ 정답: 9 권

해설

500 원 하는 공책은 x 권, 800 원 하는 연습장은 $(13 - x)$ 권

$$7500 \leq 500x + 800(13 - x) < 8000$$

$$7500 \leq 500x + 10400 - 800x < 8000$$

$$7500 \leq -300x + 10400 < 8000$$

$$-29 \leq -3x < -24$$

$$8 < x \leq \frac{29}{3}$$

그러므로 9 권

38. 모든 실수 x 에 대하여, 부등식 $k\{x^2 - (k-2)x - 3(k-2)\} > 0$ 가 성립되게 하는 상수 k 값의 범위를 구하면?

① $0 < k < 2$

② $1 < k < 2$

③ $1 < k < 4$

④ $-1 < k < 3$

⑤ $-2 < k < -1$

해설

모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$k > 0 \cdots \textcircled{1}$$

$x^2 - (k-2)x - 3(k-2) > 0$ 이 항상 성립하려면

$$D = (k-2)^2 + 12(k-2) < 0 \text{에서}$$

$$(k-2)(k+10) < 0$$

$$\therefore -10 < k < 2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 0 < k < 2$$

39. 이차방정식 $x^2 + (a - b)x + ab = 1$ 이 a 의 어떤 실수값에 대해서도 항상 실근을 갖도록 b 의 범위를 정하면?

① $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq b \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $-\frac{\sqrt{2}}{3} \leq b \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$

⑤ $b \leq -2, b \geq 2$

② $b \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, b \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $b \leq -\frac{\sqrt{2}}{3}, b \geq \frac{\sqrt{2}}{3}$

해설

$x^2 + (a - b)x + ab - 1 = 0$ 에서

$$D = (a - b)^2 - 4(ab - 1) \geq 0$$

이 식을 a 에 관해서 정리하면, $a^2 - 6ba + b^2 + 4 \geq 0$ 이

부등식이 a 에 관계없이 항상 성립하기 위한 조건은 $\frac{D'}{4} \leq 0$

이므로

$$\frac{D'}{4} = (3b)^2 - (b^2 + 4) \leq 0$$

$$\therefore 2b^2 - 1 \leq 0 \text{에서}$$

$$(\sqrt{2}b + 1)(\sqrt{2}b - 1) \leq 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq b \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

40. 부등식 $\left| \frac{(1-a)x}{x^2+1} \right| < 1$ 이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립할 때, a 의 범위를 구하면?

① $0 < a \leq 3$

② $a < -1$ 또는 $a > 3$

③ $-1 < a < 3$

④ $-1 \leq a \leq 3$

⑤ $-3 < a < 1$

해설

$$-1 < \frac{(1-a)x}{x^2+1} < 1$$

$$\Rightarrow \text{i) } -x^2 - 1 < (1-a)x,$$

$$\text{ii) } (1-a)x < x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \text{i) } x^2 + (1-a)x + 1 > 0,$$

$$\text{ii) } x^2 + (a-1)x + 1 > 0$$

둘 모두 판별식이 0보다 작아야 한다.

$$D = (1-a)^2 - 4 < 0$$

$$D = (a-1)^2 - 4 < 0$$

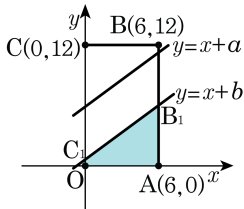
$$\Rightarrow (a-3)(a+1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < a < 3$$

$$-1 < a < 3$$

$$\therefore -1 < a < 3$$

41. 네 점 $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,12)$, $C(0,12)$ 를 꼭지점으로 하는 사각형 $OABC$ 가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y = x + a$, $y = x + b$ 가 사각형 $OABC$ 의 넓이를 삼등분할 때, ab 의 값은?



① 4

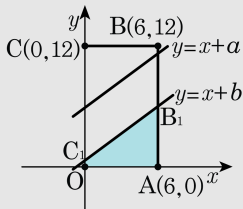
② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설



사각형 $OABC$ 의 넓이가 72이므로
사각형 OAB_1C_1 의 넓이는 24이다.

$$\frac{1}{2}(b + 6 + b) \times 6 = 24 \text{ 이므로 } b = 1$$

같은 방법으로 $a = 5$

$$\therefore ab = 5$$

42. 원점과 직선 $2x - y - 5 + k(x + 2y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라고 할 때, $\frac{1}{f(k)^2}$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{4}{5}$

⑤ 1

해설

점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

원점과 직선 $(2+k)x + (2k-1)y - 5 = 0$ 사이의 거리

$$f(k) \text{ 는 } f(k) = \frac{|-5|}{\sqrt{(2+k)^2 + (2k-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5(1+k^2)}}$$

$$\therefore \frac{1}{\{f(k)\}^2} = \frac{k^2 + 1}{5}$$

따라서, $k = 0$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{\{f(0)\}^2} = \frac{1}{5}$ 이다.

43. 두 원 $(x-a)^2 + y^2 = 4$, $x^2 + (y-b)^2 = 9$ 가 서로 외접할 때, 점 (a, b) 가 그리는 도형에 대한 설명 중 옳은 것은?

- ① 이 도형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 12이다.
- ② 이 도형에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $6\sqrt{3}$ 이다.
- ③ 두 종류의 두형이 나타난다.
- ④ 이 도형의 길이는 10π 이다.
- ⑤ 원점을 지나는 원이다.

해설

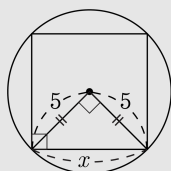
두 원이 서로 외접할 조건은 두 원의 중심을 연결한 선분의 길이가 두 원의 반지름들의 합과 같으면 된다.

원 $(x-a)^2 + y^2 = 4$ 에서 중심은 $(a, 0)$, 반지름은 2이고, 원 $x^2 + (y-b)^2 = 9$ 에서 중심은 $(0, b)$, 반지름은 3이다.

따라서, $(a, 0)$ 과 $(0, b)$ 사이의 거리가 5가 되므로 $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$
 $\therefore a^2 + b^2 = 25$

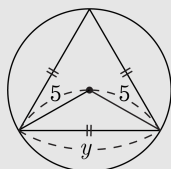
그러므로 구하려는 자취는 $x^2 + y^2 = 25$

① 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 하면



$$2x^2 = 10 \therefore x = 5\sqrt{2}$$

② 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 y 라 하면



$$y = \frac{5}{2}\sqrt{3} \times 2 = 5\sqrt{3}$$

$\therefore y = 5\sqrt{3}$ 이다.

44. 점 (3, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5

② $\sqrt{26}$

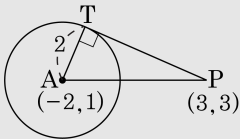
③ 6

④ $\sqrt{37}$

⑤ 7

해설

준식에서 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$ 이므로
중심이 $(-2, 1)$ 반지름의 길이가 2 인 원이다.



$$\begin{aligned}\overline{PT}^2 &= \overline{PA}^2 - \overline{AT}^2 \\ &= (3 + 2)^2 + (3 - 1)^2 - 2^2 \\ &= 25\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PT} = 5$$