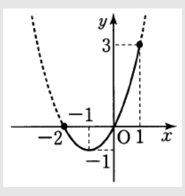
1. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



2. $2 \le x \le 3$일 때, $\dfrac{2x}{1-x}$의 범위는?

① $-4 \le \dfrac{2x}{1-x} \le -3$
② $-4 \le \dfrac{2x}{1-x} \le -2$
③ $-4 \le \dfrac{2x}{1-x} \le -1$
④ $1 \le \dfrac{2x}{1-x} \le 2$
⑤ $1 \le \dfrac{2x}{1-x} \le 3$

해설

$\dfrac{2x}{1-x} = \dfrac{-2(-x+1)+2}{-x+1} = -2 + \dfrac{2}{-x+1}$

$2 \le x \le 3$에서 -1을 곱하면 $-2 \ge -x \ge -3$

1을 더하면 $-1 \ge -x+1 \ge -2$

역수를 취하면 $\dfrac{1}{-1} \le \dfrac{1}{-x+1} \le \dfrac{1}{-2}$

2를 곱하면 $-2 \le \dfrac{2}{-x+1} \le -1$

-2를 더하면 $-4 \le -2 + \dfrac{2}{-x+1} \le -3$ 에서 $-4 \le \dfrac{2x}{1-x} \le -3$

3. 다음 중 연립부등식 $\begin{cases} 5x+3<18 \\ -3x+2<0 \end{cases}$ 의 해가 아닌 것을 모두 고르면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$\begin{cases} 5x+3<18 \\ -3x+2<0 \end{cases}$ 을 풀면 $\begin{cases} x<3 \\ x>\frac{2}{3} \end{cases}$ 이다.

따라서 $\frac{2}{3}<x<3$ 을 만족하지 않는 것은 $\frac{1}{3}$, 3 이다.

4. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 10 개일 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 7x + 4 > 5x \\ 15 - x > a \end{cases}$$

① 3, 4 ② 5, 6 ③ 6 ④ 6, 7 ⑤ 4, 5, 6

해설

$7x + 4 > 5x$
$\therefore\ x > -2$
$15 - x > a$
$\therefore\ x < 15 - a$
만족하는 정수는 10 개이므로 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 이다.
$8 < 15 - a \leq 9$
$6 \leq a < 7$
$\therefore\ a = 6$

5. 부등식 $|x-2| \le 2x-1$을 풀면?

① $x \ge 2$　② $x \ge -1$　③ $1 \le x < 2$
④ $x \ge 1$　⑤ $x < 2$

해설
(ⅰ) $x < 2$인 경우
$-x+2 \le 2x-1$
$3 \le 3x$, $1 \le x$
이 범위에서의 해는 $1 \le x < 2$이다.
(ⅱ) $x \ge 2$인 경우
$x-2 \le 2x-1$
$-1 \le x$
이 범위에서 해는 $x \ge 2$이다.
따라서 x의 범위는 $x \ge 1$이다.

6. 다음 이차함수 중 최댓값을 갖는 것은?

① $y = x^2 + x - 1$

② $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$

③ $y = \frac{1}{5}x^2 + 4$

④ $y = -x^2 - 2x + 1$

⑤ $y = \frac{3}{4}(x+1)^2$

해설

이차항의 계수가 음수인 것을 찾는다.

7. 이차함수 $y = -2x^2 + 8x$ 의 최댓값을 구하면?

① 8 ② 4 ③ 2 ④ -2 ⑤ -4

해설

$y = -2x^2 + 8x = -2(x-2)^2 + 8$

$x = 2$ 일 때, 최댓값은 8 이다.

8. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동시켰을 때, 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = -2(x+3)^2 + 4$

따라서 $x = -3$ 일 때, 최댓값은 4 이다.

9. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

위의 조립제법에서 $f(x) = (x-2)(x^2 + x + 3)$ 이므로 주어진 방정식은$(x-2)(x^2 + x + 3) = 0$

$\therefore x = 2$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

두 허근의 합은 -1

10. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
$x^2 = t$ 로 놓으면
$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$
$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
$\therefore\ x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
$\therefore\ x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

11. 부등식 $4x-1 \leq 3x+1 < 2x+5$ 를 만족하는 x 의 값 중 가장 큰 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$4x-1 \leq 3x+1 < 2x+5$ 는 $4x-1 \leq 3x+1$, $3x+1 < 2x+5$ 두 식으로 나뉜다.
각각을 정리하면 $x \leq 2$, $x < 4$ 이다.
$\therefore \ x \leq 2$
따라서 범위 안의 가장 큰 정수는 2 이다.

12. 모든 실수 x, y에 대하여 $\sqrt{mx^2 - mx + 2}$가 0이 아닌 실수가 될 실수 m의 값의 범위는?

① $0 < m < 4$ ② $4 \le m \le 8$ ③ $0 \le m < 8$
④ $4 < m \le 8$ ⑤ $m \ge 8$

해설

$\sqrt{mx^2 - mx + 2}$가 0이 아닌 실수가 되려면 $mx^2 - mx + 2 > 0$이어야 한다.
i) $m = 0$일 때 $0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 2 > 0$이므로
모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.
ii) $m \ne 0$일 때 $mx^2 - mx + 2 > 0$가
모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면
$m > 0 \cdots$ ㉠
또 이차방정식 $mx^2 - mx + 2 = 0$의 판별식을
D라 할 때
$D = (-m)^2 - 8m < 0,\ m(m-8) < 0$
$\therefore 0 < m < 8 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0 < m < 8$
i), ii) 에서 $0 \le m < 8$

13. 부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 일 때 부등식 $cx^2 - bx + a > 0$ 의 해는?

① $x < -\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > -\frac{1}{\beta}$

② $x < -\frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

③ $-\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$

④ $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$

⑤ $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 이므로

$a < 0$ 이다. 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 이고

이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$

양변에 a 를 곱하면

$a(x-\alpha)(x-\beta) > 0$

$ax^2 - a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta > 0$

$\therefore\ b = -a(\alpha+\beta),\ c = a\alpha\beta$

따라서 $cx^2 - bx + a > 0$ 에 대입하면

$a\alpha\beta x^2 + a(\alpha+\beta)x + a > 0$

$\alpha\beta x^2 + (\alpha+\beta)x + 1 < 0$

$(\alpha x + 1)(\beta x + 1) < 0$

$\therefore -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$ $(\because 0 < \alpha < \beta)$

14. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 4x < 5 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1 < x < 2$

해설

부등식 $x^2 - 4 < 0$에서 $(x+2)(x-2) < 0$
$\therefore -2 < x < 2 \cdots\cdots$ ㉠
$x^2 - 4x < 5$에서 $x^2 - 4x - 5 < 0$
$(x+1)(x-5) < 0$
$\therefore -1 < x < 5 \cdots\cdots$ ㉡
따라서 구하는 해는 ㉠과 ㉡를
동시에 만족하는 x의 값이므로
$\therefore -1 < x < 2$

15. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 두 조건을 모두 만족할 때, $a + b - c$ 의 값을 구하여라.

> ㉠ 두 점 $(-3,\ 0)$, $(-5,\ 0)$ 에서 만난다.
>
> ㉡ 최솟값이 $-\frac{1}{3}$ 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

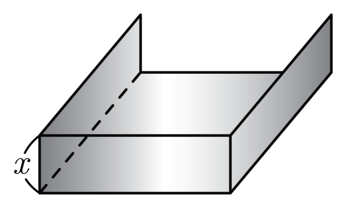
$y = a(x+3)(x+5)$ 로 놓으면 $y = a(x^2+8x+15) = a(x+4)^2 - a$

최솟값이 $-\frac{1}{3}$ 이므로 $-a = -\frac{1}{3}$ 에서 $a = \frac{1}{3}$ 이다.

즉, $y = \frac{1}{3}(x^2+8x+15) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 5$ 에서 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{8}{3}$, $c = 5$ 이다.

$\therefore a + b - c = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 5 = -2$

16. 너비가 60 인 양철판을 아래 그림과 같이 구부려서 물받이를 만들려고 한다. 구부리는 양철판의 길이를 x 라 할 때, 단면의 넓이가 최대가 되는 x 의 값을 구하여라.



① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

단면의 넓이를 y 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(60-2x) \\ &= -2x^2+60x \\ &= -2(x^2-30x+225-225) \\ &= -2(x-15)^2+450 \end{aligned}$$

$x=15$ 일 때, 최대 넓이 450

17. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$이 중근을 가질 때, 실수 a의 값들의 합을 구하면?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 7　　⑤ 10

해설

$(x-1)(x^2-ax+2a)=0$에서

ⅰ) 1이 중근일 경우

$x^2-ax+2a=0$에 $x=1$을 대입하면 성립해야 하므로

$1-a+2a=0$, $a=-1$

ⅱ) 1이 중근이 아닌 경우

$x^2-ax+2a=0$이 중근을 가지므로 판별식 $D=0$에서

$D=a^2-8a=0$, $a(a-8)=0$, $a=0,8$

$\therefore\ 0+8-1=7$

18. 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x-1=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 x의 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+3x^2-2x-1=0$에서

$\alpha+\beta+\gamma=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$

$\alpha\beta\gamma=1$

$x^3+ax^2+bc+c=0$에서

$$\begin{aligned}-a &= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\\ &= \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\\ &= \frac{-2}{1}=-2\end{aligned}$$

$\therefore\ a=2$

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}\\ &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{1}=-3\end{aligned}$$

$\therefore\ b=-3$

$-c=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$

$\therefore\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-2$

19. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2+y=6 \\ 9x^2-y^2=0 \end{cases}$ 를 만족시키는 x값을 모두 더하면?

① 0　② 15　③ 10　④ -10　⑤ -15

해설

$9x^2-y^2=0$에 $3x^2+y=6$을 대입하면

$9x^2-(-3x^2+6)^2=-9x^4+45x^2-36=0$

$x^4-5x^2+4=(x^2-4)(x^2-1)=0$

$\therefore x=\pm1,\ \pm2$

$\therefore x$의 합은 $+1-1+2-1=0$

20. 다음 방정식을 만족하는 실수 $x,\ y$의 합을 구하여라.

$$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^24xy+y^2)=0$
이 때, $x,\ y$가 실수이므로 $xy-2,\ 2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots ㉠,$
$2x-y=0 \quad \cdots ㉡$
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2,\ x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 $x,\ y$의 값은 $x=\pm1,\ y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 $x,\ y$의 합은 $-3, 3$

21. 자연수 n에 대하여 이차방정식 $x^2+nx+2n=0$의 두 근을 α, β라 한다. α, β가 정수일 때, n은?

① 7, 8 ② 8, 9 ③ 9, 10 ④ 9 ⑤ 10

해설

근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-n$, $\alpha\beta=2n$ 이므로
$\alpha\beta=-2(\alpha+\beta)$, $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=0$, $(\alpha+2)(\beta+2)=4$
α, β 가 정수이므로 $\alpha+2$, $\beta+2$ 도 정수
따라서

$$\begin{cases}\alpha+2=1\\\beta+2=4\end{cases},\quad\begin{cases}\alpha+2=2\\\beta+2=2\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha+2=-1\\\beta+2=-4\end{cases},$$

$$\begin{cases}\alpha+2=-2\\\beta+2=-2\end{cases}$$ 가 되어

$$\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=2\end{cases},\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\end{cases},\begin{cases}\alpha=-3\\\beta=-6\end{cases},\begin{cases}\alpha=-4\\\beta=-4\end{cases}$$

각각의 경우, n 의 값은 $n=-(\alpha+\beta)$ 이므로
-1, 0, 9, 8 의 값을 갖는다.

22. 연립부등식 $\begin{cases} 1.2x - 2 \leq 0.8x + 3.2 \\ 3 - \dfrac{x-2}{4} < \dfrac{2x-3}{2} \\ 0.\dot{9}x \leq 6 \end{cases}$ 의 해가 $a < x \leq b$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -9　② -5　③ -2　④ 2　⑤ 9

해설

i) $1.2x - 2 \leq 0.8x + 3.2$,
$0.4x \leq 5.2, \quad x \leq 13$
ii) $3 - \dfrac{x-2}{4} < \dfrac{2x-3}{2}$ 의 양변에 4 를 곱하면 $12 - (x-2) < 2(2x-3), \quad x > 4$
iii) $0.\dot{9}x \leq 6$
$\dfrac{9}{9}x \leq 6$
$x \leq 6$
$\therefore \ 4 < x \leq 6$

23. 이차방정식 $(x-1)(x-3)+m(x-k)=0$이 모든 실수 m에 대하여 항상 서로 다른 두 실근을 가지도록 k의 값의 범위를 정하면?

① $0<k<1$ ② $1<k<3$ ③ $-1<k<1$
④ $-1<k<2$ ⑤ $-1<k<3$

해설

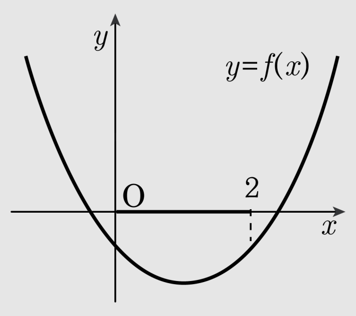
$x^2+(m-4)x+3-mk=0$은
서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=(m-4)^2-12+4mk>0$
이것을 정리하면
$m^2+4(k-2)m+4>0 \cdots$ (i)
(i)는 모든 실수 m에 대하여 성립해야 하므로
$4(k-2)^2-4<0$
$\therefore\ (k-1)(k-3)<0$
$\therefore\ 1<k<3$

24. $0 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이 항상 성립되게 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ −1

해설

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 로 놓을 때
주어진 부등식의 해가 0, 2 를 포함 하려면
$f(0) \le 0,\ f(2) \le 0$ 이어야 한다.



$f(0) = a^2 - 4 \le 0$
$\therefore\ -2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠
$f(2) = -2a + a^2 \le 0$
$\therefore\ 0 \le a \le 2 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위는 $0 \le a \le 2$
따라서 $M = 2,\ m = 0$ 이므로 $M - m = 2$

25. 두 부등식 $x^2 - 2x - 8 > 0$,
$x^2 - (2a+1)x + a^2 + a < 0$에 대하여 공통범위가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 범위를 $b \le a \le c$라 할 때, $b+c$의 값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$(x-4)(x+2) > 0$,
$\therefore\ x > 4,\ x < -2$
$x^2 - (2a+1)x + a(a+1) < 0$
$(x-a)(x-a-1) < 0$
두 부등식의 공통범위가 없으려면
$a \ge -2,\ a+1 \le 4 \rightarrow a \le 3$
$\therefore\ -2 \le a \le 3$
$\therefore\ b = -2,\ c = 3$
$\therefore\ b + c = 1$