1. 포물선 $y = x^2 + 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하여 꼭짓점의 좌표가 (3, 7) 인 포물선을 얻을 수 있다. 이때, $b - a$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

포물선 $y = x^2 + 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$y - b = (x - a)^2 + 3$
$\therefore y = (x - a)^2 + b + 3$
이때, 꼭짓점의 좌표는 $(a, b + 3)$ 이므로
$a = 3, b + 3 = 7 \qquad \therefore b = 4$
$\therefore b - a = 4 - 3 = 1$

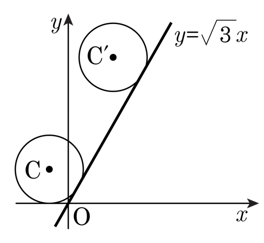
2. 직선 $2x+ay+b=0$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하였더니 직선 $3x+2y-6=0$ 과 x 축 위의 점에서 직교하였다. 이 때, $a+b$ 의 값은?

① -16　② -13　③ -11　④ -9　⑤ -7

해설

직선 $2x+ay+b=0$ 을
x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면,
$2(x+3)+a(y-1)+b=0$
$2x+ay-a+b+6=0 \cdots$ ㉠
즉, 직선 ㉠ 의 기울기는 $-\frac{2}{a}$ 이고,
x 절편은 $\frac{a-b-6}{2}$ 이다.
이 때, 직선 ㉠ 이 직선 $3x+2y-6=0$,
즉 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 과 x 절편이 같고
서로 직교하므로
(i) $\frac{a-b-6}{2}=2$
$\therefore\ a-b=10$
(ii) $-\frac{2}{a}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1\quad\therefore\ a=-3$
따라서 (i), (ii) 에서 $a=-3$, $b=-13$ 이므로
$a+b=-3+(-13)=-16$

3. 다음 그림과 같이 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 x 축에 접하는 반지름의 길이가 1인 C : $(x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (y-1)^2 = 1$ 이 있다. 이것을 직선 $y = \sqrt{3}x$ 위로 두 바퀴 굴려 원 C' 의 방정식이 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 이 된다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?



① $\frac{3+\sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2}+1)\pi$ ② $\frac{3-\sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2}-1)\pi$
③ $\frac{3+\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+1)\pi$ ④ $\frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+2)\pi$
⑤ $\frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+1)\pi$

해설

i) 원 C 와 원 C' 의 중심을 지나는 직선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이므로

$\frac{b-1}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$ 에서

$b = \sqrt{3}a + 2$

ii) 원이 두 바퀴 굴러 갔으므로 원 중심 사이의 거리는 4π 이다.

$\Rightarrow \ (a + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (b-1)^2 = 16\pi^2$

i) 을 ii) 에 대입하여 정리하면,

$4a^2 + \frac{8}{3}\sqrt{3}a + \frac{4}{3} = 16\pi^2$

$3a^2 + 2\sqrt{3}a + 1 = 12\pi^2$

$\Rightarrow \ (\sqrt{3}a + 1)^2 = (2\sqrt{3}\pi)^2$

$\Rightarrow \ a = \frac{2\sqrt{3}\pi - 1}{\sqrt{3}} \ (\because a > 0)$

$\Rightarrow \ b = 2\sqrt{3}\pi + 1$

$\therefore \ a + b = \frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+2)\pi$