

1. 포물선 $y = x^2 + 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하여 꼭짓점의 좌표가 $(3, 7)$ 인 포물선을 얻을 수 있다. 이 때, $b - a$ 의 값은?

① -1

② 1

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

포물선 $y = x^2 + 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y - b = (x - a)^2 + 3$$

$$\therefore y = (x - a)^2 + b + 3$$

이때, 꼭짓점의 좌표는 $(a, b + 3)$ 이므로

$$a = 3, b + 3 = 7 \quad \therefore b = 4$$

$$\therefore b - a = 4 - 3 = 1$$

2. 직선 $2x + ay + b = 0$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하였더니 직선 $3x + 2y - 6 = 0$ 과 x 축 위의 점에서 직교하였다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -16

② -13

③ -11

④ -9

⑤ -7

해설

직선 $2x + ay + b = 0$ 을

x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면,

$$2(x + 3) + a(y - 1) + b = 0$$

$$2x + ay - a + b + 6 = 0 \cdots \textcircled{7}$$

즉, 직선 $\textcircled{7}$ 의 기울기는 $-\frac{2}{a}$ 이고,

x 절편은 $\frac{a - b - 6}{2}$ 이다.

이 때, 직선 $\textcircled{7}$ 이 직선 $3x + 2y - 6 = 0$,

즉 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 과 x 절편이 같고

서로 직교하므로

$$(i) \frac{a - b - 6}{2} = 2$$

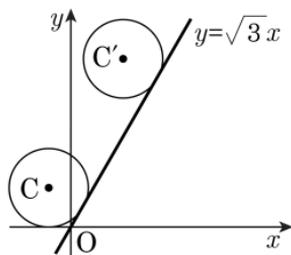
$$\therefore a - b = 10$$

$$(ii) -\frac{2}{a} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \quad \therefore a = -3$$

따라서 (i), (ii) 에서 $a = -3$, $b = -13$ 이므로

$$a + b = -3 + (-13) = -16$$

3. 다음 그림과 같이 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 x 축에 접하는 반지름의 길이가 1인 $C : (x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (y - 1)^2 = 1$ 이 있다. 이것을 직선 $y = \sqrt{3}x$ 위로 두 바퀴 굴려 원 C' 의 방정식이 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ 이 된다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?



- ① $\frac{3 + \sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2} + 1)\pi$ ② $\frac{3 - \sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2} - 1)\pi$
 ③ $\frac{3 + \sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3} + 1)\pi$ ④ $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3} + 2)\pi$
 ⑤ $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3} + 1)\pi$

해설

i) 원 C 와 원 C' 의 중심을 지나는 직선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{b - 1}{a + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \text{ 에서}$$

$$b = \sqrt{3}a + 2$$

ii) 원이 두 바퀴 굴러 갔으므로 원 중심 사이의 거리는 4π 이다.

$$\Rightarrow (a + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (b - 1)^2 = 16\pi^2$$

i) 을 ii) 에 대입하여 정리하면,

$$4a^2 + \frac{8}{3}\sqrt{3}a + \frac{4}{3} = 16\pi^2$$

$$3a^2 + 2\sqrt{3}a + 1 = 12\pi^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}a + 1)^2 = (2\sqrt{3}\pi)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}\pi - 1}{\sqrt{3}} \quad (\because a > 0)$$

$$\Rightarrow b = 2\sqrt{3}\pi + 1$$

$$\therefore a + b = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3} + 2)\pi$$