1. 다음 방정식을 만족하는 x, y의 값을 차례대로 구하여라.

$$2x-y=4x+10=x+y-5$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=-5$

▷ 정답 : $y=0$

해설

주어진 방정식은 다음의 연립방정식과 같다.

$$\begin{cases} 2x-y=4x+10 \\ 2x-y=x+y-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+y+10=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y+5=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $x=2y-5 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면 $2(2y-5)+y+10=0$

$\therefore \ y=0$

$y=0$을 ㉢에 대입하면 $x=-5$

$\therefore \ x=-5,\ y=0$

2. 연립방정식

$$\begin{cases} 2x + ay = 10 \\ x - y = b \end{cases}$$

의 해가 $x = 2,\ y = -3$일 때, $a + b$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x = 2,\ y = -3$을
두 방정식
$2x + ay = 10,\ x - y = b$에 대입하면
모두 성립시키므로 $4 - 3a = 10$
$\therefore\ a = -2$
$2 - (-3) = b$
$\therefore\ b = 5$
$\therefore\ a + b = 3$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 4

해설

$\begin{cases} x-y=1 \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$5=1^2+2xy$

$\therefore\ xy=2$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

$(x-y)(x-2y)$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

ii) $x = 2y$

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를

$x=a$, $y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots$ ㉠

$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3$, $xy=2$

$\therefore \quad ab=2$

6. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 $20\,\%$증가하였고, B제품은 $25\,\%$증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 40개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

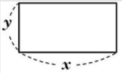
7. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore \ y = 6$
$y = 6$ 을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore \ xy = 11 \times 6 = 66$

8. 집과 A정류장 사이의 거리를 x m, A정류장과 B정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나)를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

> (가) 집에서 A정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다.
> (나) 다음 날은 집에서 어제 걸어간 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

① (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=1680$

② (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=3360$

③ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

④ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=3360$

⑤ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

해설

시속 30 km $\Rightarrow$ 분속 500 m

(가) $\dfrac{x}{60}+3+\dfrac{y}{500}=10,\ \dfrac{x}{60}+\dfrac{y}{500}=7$

$\therefore\ 25x+3y=10500$

(나) $\dfrac{x+y}{60}=28$

$\therefore\ x+y=1680$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -2

해설

$y = x - 3$을 이차식에 대입하면

$x^2 + 2x(x-3) + (x-3)^2 = 1$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\therefore\ x = 1, 2$

(i) $x = 1$일 때 $y = -2$

(ii) $x = 2$일 때 $y = -1$

따라서 $xy = -2$

10. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하여라.

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} (2x-y)(x+2y)=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$$

1) $y=2x$일 때

$x^2+4x^2=5x^2=20$

$\therefore\ x=\pm2,\ y=\pm4$

2) $x=-2y$일 때

$4y^2+y^2=5y^2=20$

$\therefore\ y=\pm2,\ x=\mp4$

$(x,\ y)=(2,\ 4),(-2,\ -4),(-4,\ 2),(4,\ -2)$

$\therefore\ \alpha+\beta=\ 6,\ -6,\ -2,\ 2$

그러므로 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -6

11. $2xy=x^2$, $2xy=y^2-y$를 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} 2xy=x^2 & \cdots ㉠ \\ 2xy=y^2-y & \cdots ㉡ \end{cases}$$

라 하면 ㉠에서 $x=0$ 또는 $x=2y$

(i) $x=0$일 때;

㉡에서 $y^2-y=0$

$\therefore\ y=0, 1$

(ii) $x=2y$일 때;

㉡에서 $4y^2=y^2-y$

$\therefore\ y=0, -\dfrac{1}{3}$

$\therefore = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ \left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$의 값을 구하면?

① -1　② 0　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \cdots ① \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① − ② × 2를 계산하여 정리하면

$x^2 + xy - 2y^2 = 0,\ (x + 2y)(x - y) = 0$

$\therefore\ x = y,\ x = -2y$ 각각을 ① 식에 대입하면

i) $x = y$일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0,\ -2 = 0$ 불능

ii) $x = -2y$일 때 $4y^2 + 2y^2 - 2 = 0$ $\begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

13. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2-2v=25 \\ v=12 \end{cases}$$

$\therefore\ u=\pm 7,\ v=12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots ㄷ \\ xy=12 & \cdots ㄴ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x+y=-7 & \cdots ㄹ \\ xy=12 & \cdots ㄴ \end{cases}$

(i) ㄷ, ㄴ에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=3,\ y=4$ 또는 $x=4,\ y=3$

(ii) ㄹ, ㄴ에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2+7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=-3,\ y=-4$ 또는 $x=-4,\ y=-3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

14. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -4 \end{cases}$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2 + 3t - 4 = 0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t+4) = 0$ 에서

$t = 1$ 또는 $t = -4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1 + (-4) + (-4) + 1 = -6$

15. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$$x^2+(m+2)x-4=0\ ,\ x^2+(m+4)x-6=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0\cdots$ ㉠

$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0\quad\therefore\ \alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$

$\therefore\ m=1$

$\therefore\ m+\alpha=2$

16. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=k \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 상수 k 의 값은?

① ±1　② ±3　③ ±5　④ ±7　⑤ ±9

해설

$$\begin{cases} 2x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=k-2x$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+(k-2x)^2=5$

$5x^2-4kx+k^2-5=0$ 이 중근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5\left(k^2-5\right)=0$

$-k^2+25=0,\ k^2=25$

$\therefore\ k\pm5$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 k_1, k_2 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$\begin{cases} x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=-x+k$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=4$

$3x^2-4kx+2k^2-4=0 \quad \cdots ㉢$

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-4)=0$

$4k^2-6k^2+12=0,\ k^2=6$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ k_1k_2=\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$

18. 두 이차방정식 $ax^2+4x+2=0$, $x^2+ax+1=0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면

$at^2+4t+2=0\cdots$ ㉠

$t^2+at+1=0\cdots$ ㉡

㉠ $-$ ㉡ $\times 2$: $(a-2)t^2+(4-2a)t=0$

$(a-2)t(t-2)=0$

이때, $a=2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a\neq 2$

그런데 $t=0$ 이면 ㉠, ㉡의 해가 존재하지 않으므로 $t=2$

따라서 ㉡에서 $2a+5=0$

$\therefore\ a=-\frac{5}{2}$

19. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2+2x+k=0$, $x^2+kx+2=0$이 단 한 개의 공통근을 가질 때, k의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근을 α 라 하면

$\alpha^2+2\alpha+k=0$ 이고 $\alpha^2+k\alpha+2=0$ 이므로

$\alpha^2+2\alpha+k=\alpha^2+k\alpha+2$

$(2-k)\alpha+(k-2)=0$

따라서 $\alpha=1$ 이고

$1+2+k=0$ 이므로 $k=-3$

20. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy+3y^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$의 값을 모두 구하면?

① $-\frac{7}{2}, -1, 1, \frac{7}{2}$ ② $-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$ ③ $-1, 1$
④ $-\frac{7}{2}, 1$ ⑤ $1, \frac{7}{2}$

해설

㉠ $-$ ㉡ $\times 8$에서 $x^2-11xy-26y^2=0$, $(x+2y)(x-13y)=0$

$x+2y=0 \cdots\cdots$ ㉢

$x-13y=0 \cdots\cdots$ ㉣

㉡, ㉢에서 $y^2=1$

$\therefore\ y=\pm 1,\ x=\mp 2$(복호동순)

㉡, ㉣에서 $16y^2=1$

$\therefore\ y=\pm\frac{1}{4},\ x=\pm\frac{13}{4}$(복호동순)

$\therefore\ x+y=-1,\ 1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$

21. 각 수가 다른 두 수의 곱이 되는 0이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a=bc,\ b=ca,\ c=ab,$

$abc=(bc)(ca)(ab)=(abc)^2,$

$abc\neq 0,\quad abc=1,$

$abc=a^2=b^2=c^2=1$

$a=\pm 1,\ b=\pm 1,\ c=\pm 1$

그러나 $abc=1$ 이므로, $a,\ b,\ c$ 중에서 -1인 것은 없거나 2개이다.

$\therefore\ (a,\ b,\ c)=(1,1,1),\ (1,-1,-1),\ (-1,1,-1),\ (-1,-1,1)$

22. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근을 가질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통 실근을 α라 하면

$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \cdots(\text{i})$

$b\alpha^2+c\alpha+a=0 \quad \cdots(\text{ii})$

$c\alpha^2+a\alpha+b=0 \quad \cdots(\text{iii})$

(i)+(ii)+(iii)하면

$(a+b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

α가 실수일 때 $\alpha^2+\alpha+1>0$

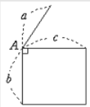
$\therefore \ a+b+c=0$

23. 직육면체의 한 꼭짓점 A에 모인 세면의 넓이의 비가 $2:3:4$ 일 때, 꼭짓점 A에 모인 세 모서리의 길이의 비를 구하면?

① $2:3:4$ ② $4:3:7$ ③ $3:1:4$

④ $4:3:6$ ⑤ $4:5:6$

해설



꼭지점 A 의 각면은 넓이비가 $2:3:4$ 이므로,

$$\begin{cases} ab = 2k^2 \cdots ① \\ bc = 3k^2 \cdots ② \\ ca = 4k^2 \cdots ③ \end{cases}$$

(k 는 양의 상수)

$ab \times bc \times ca = 2k^2 \cdot 3k^2 \cdot 4k^2$, $(abc)^2 = 24k^6$

$\therefore\ abc = 2\sqrt{6}k^3 \cdots ④$

④÷ ② 하면 $a = \dfrac{2}{3}\sqrt{6}k$

④÷ ③ 하면 $b = \dfrac{\sqrt{6}}{2}k$

④÷ ① 하면 $c = \sqrt{6}k$

$\therefore\ a:b:c = \dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{2} : 1 = 4:3:6$

24. 어떤 문자도 0 은 아니고, $xy = a,\ xz = b,\ yz = c$ 라고 할 때, $x^2+y^2+z^2$ 은?

① $\dfrac{ab + ac + bc}{abc}$ ② $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$

③ $\dfrac{(a + b + c)^2}{abc}$ ④ $\dfrac{(ab + ac + bc)^2}{abc}$

⑤ $\dfrac{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}{abc}$

해설

$abc = x^2y^2z^2 = x^2c^2,\ x^2 = \dfrac{ab}{c}$

마찬가지로, $y^2 = \dfrac{ac}{b}$, $z^2 = \dfrac{bc}{a}$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\\ &= \frac{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}{abc}\end{aligned}$$

25. A가 서울에서 부산으로 출발하고, B는 A보다 30분 늦게 부산에서 서울로 출발했다. A와 B는 낮 12시에 도중에서 만난 후 A는 오후 3시에 부산에,B는 오후 1시 40분에 서울에 각각 도착했다고 한다면 A가 서울을 출발한 시각은? (단, A와 B의 속력은 각각 일정하다.)

① 9시 ② 9시 30분 ③ 10 시

④ 10시 30분 ⑤ 11시

해설

A, B 의 시속을 각각 x/시, y/시
A 가 출발한 후 B 를 만날 때까지의 시간을
t (시간) 라 하면 A 가 B 를 만나기 직전까지
움직인 거리 xt 를 가는데 B 는 1 시간 40 분 걸렸으므로

$$xt = \frac{5}{3}y \cdots ㉠$$

또, B 가 A 를 만나기 직전까지 움직인 거리

$y\left(t - \frac{1}{2}\right)$ 을 가는 데

A 는 3 시간 걸렸으므로

$$y\left(t - \frac{1}{2}\right) = 3x \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $xyt\left(t - \frac{1}{2}\right) = 5xy$

$$\Leftrightarrow \quad t\left(t - \frac{1}{2}\right) = 5$$

$$2t^2 - t - 10 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(2t-5) = 0$$

$$\therefore \ t = \frac{5}{2}$$

따라서, A 가 B 를 만날 때까지 걸린 시간이 2 시간 30 분이므로
A 가 서울을 출발한 시간은 9 시 30 분이다.