

1. 부등식 $(a+b)x + (2a-b) > 0$ 의 해가 $x < -1$ 일 때, 부등식 $ax + b > 0$ 의 해를 구하면?

① $x < -\frac{1}{2}$
④ $x > -\frac{1}{3}$

② $x < -\frac{1}{3}$
⑤ $x > -1$

③ $x > -\frac{1}{2}$

해설

$(a+b)x + (2a-b) > 0$ 의 해가 $x < -1$ 이라면

$$a+b < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$-\frac{2a-b}{a+b} = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡}$ 에서 $a = 2b$ 이고 $a+b = 2b+b = 3b < 0$

$$\therefore b < 0$$

$ax+b > 0$ 에서 $2bx+b > 0$, $2bx > -b$

$$b < 0 \text{이므로 } x < -\frac{1}{2}$$

2. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

자두의 개수 : $(9 - x)$ 개, 복숭아의 개수 : x 개

$$2800 \leq 200(9 - x) + 500x \leq 3600$$

$$\begin{cases} 2800 \leq 200(9 - x) + 500x \\ 200(9 - x) + 500x \leq 3600 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{10}{3} \leq x \leq 6$$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

3. 민수는 각각 a , $a+2$, $a+4$ 인 막대로 삼각형을 만들려고 한다. 민수가 삼각형을 만들 수 있는 a 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 2$

해설

삼각형은 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로, $a+4 < a+(a+2)$ 이고 정리하면 $a > 2$ 이다.

4. 이차함수 $y = -x^2 + ax - 2$ 의 그래프가 x 축보다 항상 아래쪽에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

② $-\frac{3\sqrt{2}}{2} < a < \frac{3\sqrt{2}}{2}$

③ $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$

④ $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{3} < a < \frac{\sqrt{2}}{3}$

해설

모든 실수 x 에 대하여 $-x^2 + ax - 2 < 0$

즉 $x^2 - ax + 2 > 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 - ax + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 8 < 0$$

$$(a + 2\sqrt{2})(a - 2\sqrt{2}) < 0$$

$$\therefore -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$$

5. 다음은 부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $m < x < n$ ($m < 0, n < 0$) 일 때, 부등식 $cx^2 + bx + a > 0$ 의 해를 구하는 과정이다.

$ax^2 + bx + c = a(x-m)(x-n) > 0$ 에서
 $m < x < n$ 의 해가 나오려면
 a 는 $(+)$ 이어야 한다.
 또, $b = -a(m+n), c = amn$ 이므로
 $cx^2 + bx + a > 0$ 은 $amnx^2 - a(m+n)x + a > 0$
 여기서 a 는 $(+)$ 이므로
 $mnx^2 - (m+n)x + 1 < 0$
 mn 는 $(-)$ 이므로 위 식을 mn 로
 나누어 정리하면 $\left(x - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$
 $\therefore (-) < x < (-)$

위 풀이 과정 중 $(+), (-), (+), (-)$ 에 알맞은 것을 차례로 나열하면?

- ① 양수, 양수, $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}$ ② 음수, 음수, $\frac{1}{n}, \frac{1}{m}$
 ③ 음수, 양수, $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}$ ④ 양수, 음수, $\frac{1}{n}, \frac{1}{m}$
 ⑤ 음수, 양수, $\frac{1}{n}, \frac{1}{m}$

해설

$a(x-m)(x-n) < 0 \Leftrightarrow m < x < n$ 이므로
 a 는 음수이어야 한다.
 $m < 0, n < 0$ 이므로 $mn > 0$
 즉, 양수이고 $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$ 이므로
 $\left(x - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < x < \frac{1}{m}$

6. 모든 실수 x 에 대하여 곡선 $y = x^2 + (k-2)x + 3$ 의 그래프가 직선 $y = x + 2$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있기 위한 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $1 < k < 5$ ② $1 \leq k \leq 5$ ③ $k \leq -1, k \leq 5$
④ $k < 1, k > 5$ ⑤ $k \leq 1, k \geq 5$

해설

곡선의 그래프가 직선의 그래프보다 위쪽에 있으려면 $x^2 + (k-2)x + 3 > x + 2$
 $\therefore x^2 + (k-3)x + 1 > 0$
위의 부등식이 항상 만족해야 하므로
방정식 $x^2 + (k-3)x + 1 = 0$ 의 판별식 D 가 $D < 0$ 이어야 한다.
 $D = (k-3)^2 - 4 < 0$
 $k^2 - 6k + 5 < 0$
 $\therefore 1 < k < 5$

7. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x < 3 \end{cases}$ 의 해 중에서

정수인 것의 개수는?

- ① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 4) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2x^2 - 5x < 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)(x - 3) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < x < 3 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{의 공통 범위는 } -\frac{1}{2} < x < 3$$

따라서, 정수인 것은 0, 1, 2로 3 개다.

8. 세 점 $A(-1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(5, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

- ① 정삼각형
- ② $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형
- ③ $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형
- ④ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형
- ⑤ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이므로
 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

9. 길이가 36인 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 C라 하고 선분 BC를 4 : 1로 외분하는 점을 D라 할 때, 선분 AD의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

수직선 위에서

A(0), B(36) 이라 하고, C(x)라 하면

$$x = \frac{3 \cdot 36 + 0 \cdot 1}{3 + 1} = 27$$

B(36), C(27) 이므로 D(y)라 하면

$$y = \frac{4 \cdot 27 - 1 \cdot 36}{4 - 1} = 24$$

$$\therefore \overline{AD} = 24$$

10. 두 점 A(2, 1), B(4, -3) 를 지나는 직선에 수직이고 y 절편이 2 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 A(2, 1), B(4, -3) 를 지나는 직선에 수직이므로,

$$\frac{1 - (-3)}{2 - 4} \cdot a = -1 \text{ 이고, } -2a = -1 \text{ 이다.}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

또, y 절편이 2 이므로 $b = 2$ 이고,

$$\text{따라서 } a + b = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

11. 두 직선 $x - 2y + 3 = 0$, $2x + ay - 2 = 0$ 이 $a = \alpha$ 일 때 수직이고, $a = \beta$ 일 때 평행하다. $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

두 직선 $x - 2y + 3 = 0$, $2x + ay - 2 = 0$ 에 대하여

(1) 수직일 때, $1 \cdot 2 + (-2) \cdot a = 0 \quad \therefore \alpha = 1$

(2) 평행할 때, $\frac{1}{2} = \frac{-2}{a} \neq -\frac{3}{2}$ 이어야 하므로

$a = -4$, $\therefore \beta = -4$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 17$

12. 직선 $(3k+1)x + (k-1)y + (2k+6) = 0$ 는 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표는?

① $(2, 4)$

② $(4, 2)$

③ $(2, -4)$

④ $(4, -2)$

⑤ $(-2, 4)$

해설

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(3x + y + 2)k + x - y + 6 = 0$$

k 에 관계없이 성립하려면

$$3x + y + 2 = 0, \quad x - y + 6 = 0$$

위의 두 식을 연립하면 $x = -2 \quad y = 4$

$\therefore$ 항상 $(-2, 4)$ 를 지난다.

13. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 3$

해설

$$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \text{ 이므로 } |2 + k| = 5 \text{ 이다.}$$

따라서 $k = 3$ ($\because k$ 는 양수)

14. 두 직선 $3x + 4y = 12$, $3x + 4y = 7$ 사이의 거리를 구하면?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$3x + 4y = 12$ 위의 임의의 한 점을 잡는다.
(4, 0)과 $3x + 4y = 7$ 사이의 거리를 구한다.

$$\therefore \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

15. 점 $(3, 3)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 두 원의 중심사이의 거리는?

① 15 ② 12 ③ 9 ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

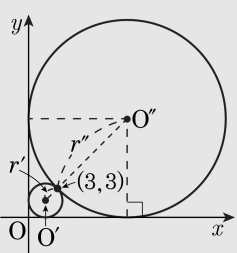
해설

조건을 만족하는 원은 1 사분면 위에 존재하므로 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면, 구하는 원의 방정식은 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이 원이 점 $(3, 3)$ 을 지나므로 $(3-r)^2 + (3-r)^2 = r^2$

$$\therefore r^2 - 12r + 18 = 0 \dots \textcircled{1}$$

한편, 두 원이 점 $(3, 3)$ 에서 서로 접하므로, 두 원의 중심사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합 $r' + r''$ 과 같다.

따라서, 근과 계수와의 관계에서 $\textcircled{1}$ 의 두 근의 합은 12 이다.



16. 중심이 A(3, k) 이고 x 축에 접하는 원 C₁ 과 중심이 B(k, 3) 이고 y 축에 접하는 원 C₂ 에 대하여 두 원 C₁, C₂ 가 서로 접할 때, 양수 k 의 값을 구하면?

- ① $-1 + \sqrt{2}$
- ② $-2 + 2\sqrt{2}$
- ③ $-3 + 3\sqrt{2}$
- ④ $-4 + 4\sqrt{2}$
- ⑤ $-5 + 5\sqrt{2}$

해설

중심이 A(3, k) 이고 x 축에 접하는 원은 반지름의 길이가 k 이므로

$C_1 : (x - 3)^2 + (y - k)^2 = k^2$

중심이 B(k, 3) 이고 y 축에 접하는 원은 반지름의 길이가 k 이므로

$C_2 : (x - k)^2 + (y - 3)^2 = k^2$

두 원의 중심 A, B 사이의 거리는

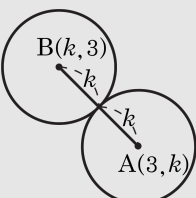
$\overline{AB} = \sqrt{(k - 3)^2 + (3 - k)^2} = \sqrt{2(k - 3)^2}$

이 때, 두 원이 외접하려면 중심거리 $\overline{AB}$ 가 두 원의 반지름의 길이의 합과 같아야 하므로

$\sqrt{2(k - 3)^2} = 2k$ 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $k^2 + 6k - 9 = 0$

$\therefore k = -3 \pm 3\sqrt{2}$ 그런데 k 는 양수이므로

$k = -3 + 3\sqrt{2} (k = -3 - 3\sqrt{2} < 0)$



17. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5이다.

18. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 겹치려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.

⇒ 중심 : $(0, 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

⇒ $k = \pm 2$

∴ $k = -2$ ($\because k < 0$)

19. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을
표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로
중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는
$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

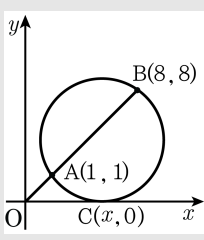
따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
 $d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

20. 좌표평면 위의 두 점 (1, 1), (8, 8) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{5}{2}$
- ② 3
- ③ $\frac{7}{2}$
- ④ $\frac{11}{2}$
- ⑤ 4

해설

다음 그림에서
 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$
 $\therefore x^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{8^2 + 8^2} = 16$
 $\therefore x = 4$



21. $3x-8 < -(2x+1)$, $\frac{x+3}{4} \leq \frac{x-1}{2}$, $0.6(1-2x) \leq 0.3x+1.2$ 을 만족하는 x 의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$3x - 8 < -(2x + 1)$
 $\therefore x < 1.4$
 $\frac{x+3}{4} \leq \frac{x-1}{2}$
 $\therefore 5 \leq x$
 $0.6(1-2x) \leq 0.3x+1.2$, x 는 정수
 $\therefore -0.4 \leq x$
따라서 모두 만족하는 x 는 없으므로 0개이다.

22. 세 부등식 A 가 $3(x-1) > 12 + 4(2x-5)$, B 가 $2(3-2x) < -x+10$, C 가 $2x+1 > a$ 이다. A 와 B 의 공통해에서 C 를 제외한 수는 존재하지 않을 때, a 의 값 중에서 가장 큰 정수는?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$3(x-1) > 12 + 4(2x-5)$ 를 풀면 $x < 1$

$2(3-2x) < -x+10$ 을 풀면 $-\frac{4}{3} < x$

A 와 B 의 공통해는 $-\frac{4}{3} < x < 1$

$2x+1 > a$ 를 풀면 $x > \frac{a-1}{2}$

C 를 제외한 수는 $x \leq \frac{a-1}{2}$ 이므로

A 와 B 의 공통해에서 C 를 제외한 수가 존재하지 않기 위해서

$\frac{a-1}{2} \leq -\frac{4}{3}$, $a \leq -\frac{5}{3}$ 가 되어야 한다.

$\therefore$ (가장 큰 정수) = -2

23. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x^2 - (a + 6)x + 6a \leq 0 \end{cases}$ 의 정수의 해가 5와 6일 때, a

의 값의 범위는 $p < a \leq q$ 이다. 이때, $p + q$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \cdots \textcircled{1} \\ x^2 - (a + 6)x + 6a \leq 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①: $x > 4, x < 2$

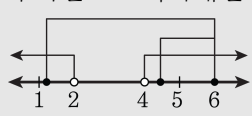
②: $(x - 6)(x - a) \leq 0$

①과 ②의 정수해가 5, 6이라면

②의 해는 $a \leq x \leq 6$

①과 ②의 정수해가 5, 6이 되도록

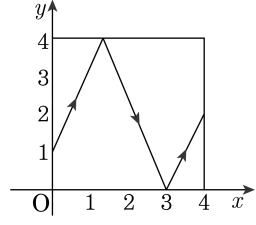
수직선으로 나타내면 다음과 같다.



$$1 < a \leq 5$$

$$p + q = 1 + 5 = 6$$

24. $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 4)$ 와 $(4, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0, 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4, 2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)



- ① $(1, 4)$ ② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$
 ④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

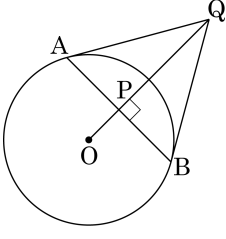
해설

대칭성을 이용하여 $(0, 1)$ 과 $(4, 10)$ 을 연결하는 직선과 $y = 4$

와의 교점을 계산하면 된다.
$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

25. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▶ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고 $\angle OPA = 90^\circ$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2} \\ &= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} \text{ 이다.}\end{aligned}$$

또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로

$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은 꼴이 된다.

$$\therefore \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \frac{75}{5} = 15$$

