1. 부등식 $(a+b)x+(2a-b)>0$의 해가 $x<-1$일 때, 부등식 $ax+b>0$의 해를 구하면?

① $x<-\frac{1}{2}$ ② $x<-\frac{1}{3}$ ③ $x>-\frac{1}{2}$
④ $x>-\frac{1}{3}$ ⑤ $x>-1$

해설

$(a+b)x+(2a-b)>0$의 해가 $x<-1$이려면

$a+b<0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$-\frac{2a-b}{a+b}=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $a=2b$이고 $a+b=2b+b=3b<0$

$\therefore\ b<0$

$ax+b>0$에서 $2bx+b>0,\ 2bx>-b$

$b<0$이므로 $x<-\frac{1}{2}$

2. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아을 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

자두의 개수 : $(9-x)$ 개, 복숭아의 개수 : x 개

$2800 \le 200(9-x)+500x \le 3600$

$$\begin{cases} 2800 \le 200(9-x)+500x \\ 200(9-x)+500x \le 3600 \end{cases}$$

$\therefore \ \frac{10}{3} \le x \le 6$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

3. 민수는 각각 a, $a+2$, $a+4$ 인 막대로 삼각형을 만들려고 한다. 민수가 삼각형을 만들 수 있는 a 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 2$

해설

삼각형은 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로, $a + 4 < a + (a + 2)$ 이고 정리하면 $a > 2$ 이다.

4. 이차함수 $y = -x^2 + ax - 2$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

② $-\frac{3\sqrt{2}}{2} < a < \frac{3\sqrt{2}}{2}$

③ $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$

④ $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{3} < a < \frac{\sqrt{2}}{3}$

해설

모든 실수 x에 대하여 $-x^2 + ax - 2 < 0$

즉 $x^2 - ax + 2 > 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 - ax + 2 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = a^2 - 8 < 0$

$(a + 2\sqrt{2})(a - 2\sqrt{2}) < 0$

$\therefore\ -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

5. 다음은 부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $m<x<n$ $(m<0,\ n<0)$ 일 때, 부등식 $cx^2+bx+a>0$의 해를 구하는 과정이다.

> $ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)>0$ 에서
> $m<x<n$ 의 해가 나오려면
> a 는 (가)이어야 한다.
> 또, $b=-a(m+n),\ c=amn$ 이므로
> $cx^2+bx+a>0$ 은 $amnx^2-a(m+n)x+a>0$
> 여기서 a는 (가)이므로
> $mnx^2-(m+n)x+1<0$
> mn 는 (나)이므로 위 식을 mn 로
> 나누어 정리하면$\left(x-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)<0$
> ∴ (다) $<x<$ (라)

위 풀이 과정 중 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 차례로 나열하면?

① 양수, 양수, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$
② 음수, 음수, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$
③ 음수, 양수, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$
④ 양수, 음수, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$
⑤ 음수, 양수, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$

해설

$a(x-m)(x-n)<0 \iff m<x<n$ 이므로
a 는 음수이어야 한다.
$m<0,\ n<0$ 이므로 $mn>0$
즉, 양수이고 $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$ 이므로
$\left(x-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)<0 \iff \frac{1}{n}<x<\frac{1}{m}$

6. 모든 실수 x 에 대하여 곡선 $y = x^2 + (k-2)x + 3$ 의 그래프가 직선 $y = x + 2$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있기 위한 실수 k 의 값의 범위는?

① $1 < k < 5$　② $1 \le k \le 5$　③ $k \le -1, k \le 5$

④ $k < 1, k > 5$　⑤ $k \le 1, k \ge 5$

해설

곡선의 그래프가 직선의 그래프보다 위쪽에 있으려면 $x^2 + (k-2)x + 3 > x + 2$

$\therefore\ x^2 + (k-3)x + 1 > 0$

위의 부등식이 항상 만족해야 하므로

방정식 $x^2 + (k-3)x + 1 = 0$ 의 판별식 D 가 $D < 0$ 이어야 한다.

$D = (k-3)^2 - 4 < 0$

$k^2 - 6k + 5 < 0$

$\therefore\ 1 < k < 5$

7. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x-4\le 0 \\ 2x^2-5x<3 \end{cases}$ 의 해 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$x^2-3x-4\le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 4\cdots\cdots$ ㉠

$2x^2-5x<3 \Leftrightarrow 2x^2-5x-3<0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(x-3)<0$

$\therefore -\dfrac{1}{2}<x<3\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-\dfrac{1}{2}<x<3$

따라서, 정수인 것은 0, 1, 2로 3 개다.

8. 세 점 $A(-1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(5, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형

② $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형

③ $\overline{AB} = \overline{BC}$인 이등변삼각형

④ $\angle A = 90°$인 직각삼각형

⑤ $\angle B = 90°$인 직각삼각형

해설

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$이므로
$\angle B = 90°$인 직각삼각형이다.

9. 길이가 36인 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 C라 하고 선분 BC를 4 : 1로 외분하는 점을 D라 할 때, 선분 AD의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

수직선 위에서

A(0), B(36) 이라 하고, C(x)라 하면

$$x = \frac{3 \cdot 36 + 0 \cdot 1}{3 + 1} = 27$$

B(36), C(27)이므로 D(y)라 하면

$$y = \frac{4 \cdot 27 - 1 \cdot 36}{4 - 1} = 24$$

$\therefore \ \overline{\mathrm{AD}} = 24$

10. 두 점 $A(2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$ 를 지나는 직선에 수직이고 y 절편이 2 인 직선의 방정식은 $y=ax+b$ 이다. 이 때, $a+b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y=ax+b$ 는 두 점 $A(2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$ 를 지나는 직선에 수직이므로,

$\frac{1-(-3)}{2-4}\cdot a=-1$ 이고, $-2a=-1$ 이다.

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

또, y 절편이 2 이므로 $b=2$ 이고,

따라서 $a+b=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

11. 두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+ay-2=0$이 $a=\alpha$일 때 수직이고, $a=\beta$일 때 평행하다. $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+ay-2=0$에 대하여

(1) 수직일 때, $1\cdot 2+(-2)\cdot a=0 \quad \therefore \ \alpha=1$

(2) 평행할 때, $\frac{1}{2}=\frac{-2}{a}\neq-\frac{3}{2}$이어야 하므로

$a=-4, \quad \therefore \ \beta=-4$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=17$

12. 직선 $(3k+1)x+(k-1)y+(2k+6)=0$는 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표는?

① $(2, 4)$　② $(4, 2)$　③ $(2, -4)$
④ $(4, -2)$　⑤ $(-2, 4)$

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(3x+y+2)k+x-y+6=0$
k에 관계없이 성립하려면
$3x+y+2=0,\quad x-y+6=0$
위의 두 식을 연립하면 $x=-2\ \ y=4$
$\therefore$ 항상 $(-2, 4)$를 지난다.

13. 점 $(3,4)$ 에서 직선 $2x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $k=3$

해설

$\dfrac{|2\times3-4+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ 이므로 $|2+k|=5$ 이다.

따라서 $k=3$ ($\because$ k 는 양수)

14. 두 직선 $3x+4y=12,\ 3x+4y=7$사이의 거리를 구하면?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$3x+4y=12$ 위의 임의의 한 점을 잡는다.

$(4,\ 0)$과 $3x+4y=7$사이의 거리를 구한다.

$$\therefore\ \frac{|3\cdot 4+4\cdot 0-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

15. 점 $(3,3)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 두 원의 중심사이의 거리는?

① 15 ② 12 ③ 9 ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

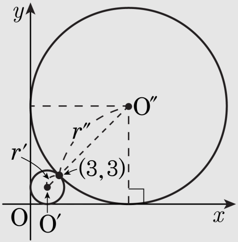
해설

조건을 만족하는 원은 1 사분면 위에 존재하므로 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면, 구하는 원의 방정식은 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(3,\ 3)$ 을 지나므로

$(3-r)^2+(3-r)^2=r^2$

$\therefore r^2-12r+18=0 \cdots$ ㉠



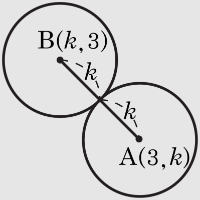
한편, 두 원이 점 $(3,3)$ 에서 서로 접하므로, 두 원의 중심사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합 $r'+r''$ 과 같다.

따라서, 근과 계수와의 관계에서 ㉠ 의 두 근의 합은 12 이다.

16. 중심이 $\mathrm{A}(3,k)$ 이고 x 축에 접하는 원 C_1 과 중심이 $\mathrm{B}(k,3)$ 이고 y 축에 접하는 원 C_2 에 대하여 두 원 $\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2$ 가 서로 접할 때, 양수 k 의 값을 구하면?

① $-1+\sqrt{2}$ ② $-2+2\sqrt{2}$ ③ $-3+3\sqrt{2}$
④ $-4+4\sqrt{2}$ ⑤ $-5+5\sqrt{2}$

해설



중심이 $\mathrm{A}(3,k)$ 이고 x 축에 접하는 원은 반지름의 길이가 k 이므로
$\mathrm{C}_1 : (x-3)^2+(y-k)^2=k^2$
중심이 $\mathrm{B}(k,3)$ 이고 y 축에 접하는 원은 반지름의 길이가 k 이므로
$\mathrm{C}_2 : (x-k)^2+(y-3)^2=k^2$
두 원의 중심 A, B 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(k-3)^2+(3-k)^2}=\sqrt{2(k-3)^2}$
이 때, 두 원이 외접하려면 중심거리 $\overline{\mathrm{AB}}$ 가 두 원의 반지름의 길이의 합과 같아야 하므로
$\sqrt{2(k-3)^2}=2k$ 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $k^2+6k-9=0$
$\therefore k=-3\pm3\sqrt{2}$ 그런데 k 는 양수이므로
$k=-3+3\sqrt{2}(k=-3-3\sqrt{2}<0)$

17. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ n > 4$ ($\because$ n 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

18. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.

$\Rightarrow$ 중심 : $(0,\ 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ $k = \pm 2$

$\therefore$ $k = -2$ ($\because$ $k < 0$)

19. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

20. 좌표평면 위의 두 점 (1, 1), (8, 8) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x좌표는 ?

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ $\frac{11}{2}$　⑤ 4

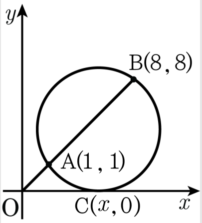
해설

다음 그림에서

$\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$

$\therefore\ x^2 = \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{8^2+8^2} = 16$

$\therefore\ x = 4$



21. $3x-8<-(2x+1)$, $\dfrac{x+3}{4} \le \dfrac{x-1}{2}$, $0.6(1-2x) \le 0.3x+1.2$을 만족하는 x의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$3x-8<-(2x+1)$

$\therefore\ x<1.4$

$\dfrac{x+3}{4} \le \dfrac{x-1}{2}$

$\therefore\ 5 \le x$

$0.6(1-2x) \le 0.3x+1.2$, x는 정수

$\therefore\ -0.4 \le x$

따라서 모두 만족하는 x는 없으므로 0개이다.

22. 세 부등식 A가 $3(x-1) > 12+4(2x-5)$, B가 $2(3-2x) < -x+10$, C가 $2x+1 > a$이다. A와 B의 공통해에서 C를 제외한 수는 존재하지 않을 때, a 의 값 중에서 가장 큰 정수는?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$3(x-1) > 12+4(2x-5)$ 를 풀면 $x < 1$

$2(3-2x) < -x+10$ 을 풀면 $-\frac{4}{3} < x$

A와 B의 공통해는 $-\frac{4}{3} < x < 1$

$2x+1 > a$ 를 풀면 $x > \frac{a-1}{2}$

C를 제외한 수는 $x \le \frac{a-1}{2}$ 이므로

A와 B의 공통해에서 C를 제외한 수가 존재하지 않기 위해서 $\frac{a-1}{2} \le -\frac{4}{3}$, $a \le -\frac{5}{3}$가 되어야 한다.

$\therefore$ (가장 큰 정수)$= -2$

23. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ x^2-(a+6)x+6a\le 0 \end{cases}$ 의 정수의 해가 5와 6일 때, a 의 값의 범위는 $p<a\le q$이다. 이때, $p+q$의 값은?

① 5　② 6　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

$\begin{cases} x^2-6x+8>0\cdots㉠ \\ x^2-(a+6)x+6a\le 0\cdots㉡ \end{cases}$

㉠: $x>4, x<2$

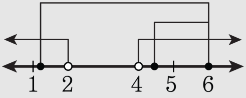
㉡: $(x-6)(x-a)\le 0$

㉠과 ㉡의 정수해가 5, 6이라면

㉡의 해는 $a\le x\le 6$

㉠과 ㉡의 정수해가 5, 6이 되도록

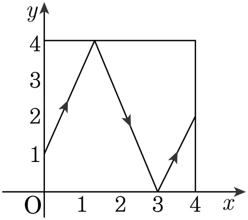
수직선으로 나타내면 다음과 같다.



$1<a\le 5$

$p+q=1+5=6$

24. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$ 와 $(4,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,\ 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)



① $(1,\ 4)$ ② $\left(\frac{10}{7},\ 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$

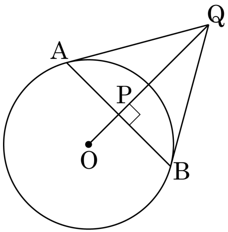
④ $\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$ 과 $(4,10)$ 을 연결하는 직선과 $y=4$ 와의 교점을 계산하면 된다. $\begin{cases} y=\frac{9}{4}x+1 \\ y=4 \end{cases}$ $\therefore\ x=\frac{4}{3}$

따라서, $\left(\frac{4}{3},4\right)$ 를 지난다.

25. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고 $\angle OPA = 90°$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해

$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2}$

$= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ 이다.

또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로

$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은 꼴이 된다.

$\therefore\ \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$

$\therefore\ \overline{PQ} = \dfrac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \dfrac{75}{5} = 15$