1. 부등식 $x^2+ax+a+3\le 0$를 만족하는 x가 오직 1개이기 위한 양수 a가 존재하는 구간은?

① $1<a<3$　② $2<a<5$　③ $3<a<6$

④ $4<a<7$　⑤ $6<a<7$

해설

$x^2+ax+a+3\le 0$의 해가
1개 존재하기 위해서는
$x^2+ax+a+3=0$이 중근을 가져야 한다.

$\therefore D=a^2-4(a+3)$
$=a^2-4a-12$
$=(a-6)(a+2)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$

2. <보기> x에 대한 부등식 $ax^2+4ax+5a>0$의 설명으로 옳은 것은 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a>0$일 때 해는 모든 실수이다.
㉡ $a=0$일 때 해는 $x=0$뿐이다.
㉢ $a<0$일 때 해는 없다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+4ax+5a>0$에서
$a(x^2+4x+5)>0,\ a\{(x+2)^2+1\}>0$
㉠ $a>0$일 때 $(x+2)^2+1>0$ $\therefore$ 모든 실수
㉡ $a=0$일 때 $0\cdot\{(x+2)^2+1\}>0$ $\therefore$ 해는 없다.
㉢ $a<0$일 때 $(x+2)^2+1<0$ $\therefore$ 해는 없다.

3. 부등식 $|x^2-1|+3x<3$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 상수 $\alpha+\beta$의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

절댓값 기호 안을 0으로 하는 x의 값을 경계로 하여 구간을 나누어 본다.

(ⅰ) $x^2-1\geq 0$,

즉 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때,

$|x^2-1|=x^2-1$이므로 주어진 부등식은

$x^2-1+3x<3,\ x^2+3x-4<0$

$(x+4)(x-1)<0$

$\therefore -4<x<1$

이 때 조건에서 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$이므로

이를 만족하는 x값의 범위는 $-4\leq x\leq -1$

(ⅱ) $x^2-1<0$,

즉 $-1<x<1$일 때,

$|x^2-1|=-x^2+1$이므로 주어진 부등식은

$-x^2+1+3x<3,\ x^2-3x+2>0$

$(x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

이 때 조건에서 $-1<x<1$이므로

이를 만족하는 x의 값의 범위는 $-1<x<1$

(ⅰ), (ⅱ)로부터 주어진 부등식의 해는 $-4<x<1$

따라서 $\alpha=-4,\ \beta=1,\ \alpha+\beta=-3$

4. 부등식 $5-x>2|x+1|$의 해와 $ax^2+bx+7>0$의 해가 같도록 상수 $a,\ b$의 값을 정할 때, $a+b$의 값은 ?

① -7 ② -5 ③ 5 ④ 7 ⑤ 0

해설

$5-x>2|x+1|$ 을 풀면
(i) $x\geq -1$ 일 때
$5-x>2x+2,\ x<1 \quad \therefore -1\leq x<1$
(ii) $x<-1$ 일 때
$5-x>-2x-2,\ x>-7 \quad \therefore -7<x<-1$
(i), (ii) 에 따라 $-7<x<1$
$ax^2+bx+7>0 \Leftrightarrow -7<x<1$ 이므로 $a<0$ 이고
$ax^2+bx+7=a(x+7)(x-1)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-6 \quad \therefore\ a+b=-7$

5. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 을 풀 때, 근우는 b 를 잘못보고 풀어서 $1 < x < 3$ 이라는 해를 얻었고, 기원이는 a 를 잘못보고 풀어서 $-2 < x < 4$ 이라는 해를 얻었다. 이 부등식의 옳은 해는?

① $-1 < x < 2$ ② $-2 < x < 3$

③ $2 - 2\sqrt{5} < x < 2 + 2\sqrt{5}$ ④ $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$

⑤ $2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

해설

$1 < x < 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$
$\therefore a = -4$
$-2 < x < 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$
$\therefore b = -8$
$x^2 - 4x - 8 < 0$
$\therefore 2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

6. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 실근을 α, β $(\alpha < \beta)$라 하고, 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$의 모든 해가 $\sqrt{2} \leq x < 3$의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$ ㉡ $ac > 0$

㉢ $4a + c < 2b$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이
$a < 0$, $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta < 3$을 만족하여야 한다.

㉠ $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta$에서 $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

㉡ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} > 0$이므로 $ac > 0$이다.

㉢ $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$에서 $4a + c < 2b$

7. 어느 회사가 판매하고 있는 상품의 1개당 판매 가격을 작년보다 $x\%$ 올리면 이 상품의 판매량이 작년보다 $\frac{x}{2}\%$ 감소한다고 한다. 이 회사가 올해 판매 금액의 10 %를 상여금으로 지급할 때, 올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액이 작년 판매 금액보다 크거나 같게 되기 위한 x의 최댓값은?

① 60 ② $\frac{200}{3}$ ③ $\frac{230}{3}$ ④ 80 ⑤ 90

해설

이 회사가 판매하는 상품의 작년 1개당
판매 가격을 a, 판매량을 b라 하자.
올해 판매 가격을 $x\%$ 올리면
올해 판매 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$,
판매량은 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$ 이므로
올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액은
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}$
작년 판매 금액이 ab이므로
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}\geq ab$
이 부등식을 정리하면
$9x^2-900x+20000\leq 0$
$(3x-100)(3x-200)\leq 0$
$\therefore \frac{100}{3}\leq x\leq\frac{200}{3}$

8. x가 실수일 때, 두 함수 $f(x)=x^2+2x-8$, $g(x)=x^2-19$ 에 대하여 부등식 $(f\circ g)(x)\le 0$ 을 만족하는 양의 정수 x 는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x)=k$ 라고 하면

$(f\circ g)(x)\le 0 \Rightarrow f(k)\le 0$

$\Rightarrow -4\le k\le 2$

$\Rightarrow -4\le g(x)\le 2$

$\Rightarrow 15\le x^2\le 21$

$\therefore$ 양의 정수 $x=4$

9. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0 ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0$
㉡식이 항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow\ k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore\ 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

10. 두 부등식 $x < -1,\ x > 2,\ 2x^2 + (5+2a)x + 5a < 0$을 동시에 만족하는 정수 x의 값이 $x = -2$뿐일 때, 실수 a의 최솟값은? (단, $a < \frac{5}{2}$)

① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ -5

해설

$2x^2 + (5+2a)x + 5a = (2x+5)(x+a) < 0$

$-\frac{5}{2} < x < -a \left(\because\ a < \frac{5}{2}\right)$

두 부등식을 만족하는 정수가 $x = -2$뿐이므로 $-2 < -a \le 3$

$\therefore\ -3 \le a < 2$

따라서, 구하는 a의 최솟값은 -3

11. 이차방정식 $x^2-2ax+a+2=0$의 두 근이 모두 1보다 클 때 실수 a의 값의 범위는?

① $0 \le a < 1$　② $1 \le a < 2$　③ $2 \le a < 3$

④ $3 \le a < 4$　⑤ $4 \le a < 5$

해설

$f(x)=x^2-2ax+a+2=(x-a)^2-a^2+a+2$

ⅰ) $D/4=a^2-a-2 \ge 0,\ a \le -1$ or $a \ge 2$

ⅱ) $f(1)=1-2a+a+2>0 \quad \therefore a<3$

ⅲ) 대칭축 $x=a>1$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 $2 \le a < 3$

12. 이차방정식 $x^2-ax+a^2-4=0$의 서로 다른 두 실근 α, β가 $\alpha<0<\beta$을 만족할 때, a의 범위를 구하면?

① $a>2$ 또는 $a<-2$

② $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a>\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a<-\frac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2<a<2$

⑤ $2<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<-2$

해설

ⅰ) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$\Rightarrow D=a^2-4(a^2-4)>0$

$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

ⅱ) 두 근이 $\alpha<0<\beta$이려면

$x=0$을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow a^2-4<0$

$\Rightarrow -2<a<2$

ⅰ), ⅱ)의 공통 범위: $-2<a<2$

13. 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2p-1=0$의 두 근이 모두 -2와 2사이에 있도록 실수 p의 값의 범위를 구하면?

① $p>5, p<1$ ② $-\frac{5}{4}<p<1$ ③ $-5<p<3$

④ $p>1, p<-1$ ⑤ $p>5, p<-1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2p-1$로 놓으면

(i) 이차방정식이 두 근을 가지므로 D >0에서

$(p+1)^2-4(2p-1)>0,\ p^2+2p+1-8p+4>0$

$p^2-6p+5>0,\ (p-5)(p-1)>0$

$\therefore\ p>5,\ p<1$

(ii) $f(-2)>0$에서

$4+2(p+1)+2p-1>0$

$4p+5>0,\ 4p>-5 \quad \therefore\ p>-\frac{5}{4}$

(iii) $f(2)>0$에서

$4-2p-2+2p-1>0$ $\therefore$ 성립

(iv) 대칭축이 -2 와 2 사이에 있어야 하므로

$-2<\frac{p+1}{2}<2 \quad -4<p+1<4$

$\therefore\ -5<p<3$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서

$\therefore\ -\frac{5}{4}<p<1$

14. 이차방정식 $x^2+2kx+k=0$의 두 근이 모두 -1과 1사이에 있기 위한 k값의 범위가 $a<k\le b$라 할 때, ab의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$D/4 = k^2-k \ge 0, k(k-1)\ge 0,\ \therefore k\le 0,\ \ k\ge 1$

$f(x)=x^2+2kx+k$라 하면

$f(-1)=1-k>0$

$\therefore\ k<1$

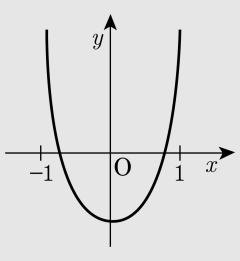
$f(1)=1+3k>0\ \therefore\ k>-\frac{1}{3}$

대칭축 $x=-k$ 이므로 $-1<-k<1$

$\therefore\ -1<k<1$

$\therefore -\frac{1}{3}<k\le 0$

$\therefore\ ab=0$



15. 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2p-1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1 보다 작고, 다른 한 근은 1 보다 크도록 실수 p 의 범위를 정하면?

① $p>-\frac{1}{3}$ ② $p>1$ ③ $-\frac{1}{3}<p<1$
④ $p<-\frac{1}{3}$ ⑤ $p<1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2p-1$ 로 놓으면

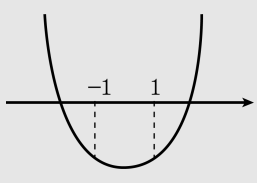
i) $f(-1)=1+p+1+2p-1=3p+1<0$

$\therefore p<-\frac{1}{3}$

ii) $f(1)=1-p-1+2p-1=p-1<0$

$\therefore p<1$

i) ii) 에서 $p<-\frac{1}{3}$



16. $n-\frac{1}{2} \le x < n+\frac{1}{2}$ (단, n은 정수)인 실수 x에 대하여 $\{x\}=n$으로 나타낼 때, 방정식 $\left\{x^2-x-\frac{1}{2}\right\}=3x+1$의 근을 α, β라 하자. 이때, $9\alpha\beta$의 값을 구하면?

① 13 ② −13 ③ 15 ④ −15 ⑤ 17

해설

$3x+1$은 정수이므로

$(3x+1)-\frac{1}{2} \le x^2-x-\frac{1}{2} < (3x+1)+\frac{1}{2}$

$\therefore\ 5 \le x^2-4x+4 < 6$

$\therefore\ 5 \le (x-2)^2 < 6$

이때, $3x+1$이 정수이므로 $3x$도 정수,

$3x=k$(k는 정수)라 하면 $x=\frac{k}{3}$

$\therefore\ 5 \le \left(\frac{k-6}{3}\right)^2 < 6$

$\therefore\ 45 \le (k-6)^2 < 54 \quad \therefore\ k=-1,\ 13$

$k=-1$일 때 $x=-\frac{1}{3}$,

$k=13$일 때 $x=\frac{13}{3}$

$\therefore\ 9\alpha\beta=-13$

17. 부등식 $\frac{1}{3} <= \frac{x^2-ax+a^2}{x^2+x+1} \le 3$이 x의 값에 관계없이 성립하기 위한 실수 a의 값의 범위를 D라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\{a \mid -1 < a < 1\} \subset D$ ② $\{a \mid a = -1,\ 1\} \subset D$

③ $\left\{a \mid -\frac{3}{5} \le a \le 1\right\} \subset D$ ④ $\left\{a \mid a \le -\frac{3}{5}\right\} \subset D$

⑤ $\{a \mid a > 1\} \subset D$

해설

$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$이므로

$3(x^2+x+1)$을 주어진 부등식에 곱하면

$x^2+x+1 \le 3(x^2-ax+a^2) \le 9(x^2+x+1)$

정리하면, $2x^2-(3a+1)x+3a^2-1 \ge 0 \cdots\cdots$ ㉠

$2x^2+(a+3)x+3-a^2 \ge 0 \cdots\cdots$ ㉡

모든 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$D = (3a+1)^2 - 8(3a^2-1) \le 0,$

$(5a+3)(a-1) \ge 0$

$\therefore\ a \le -\frac{3}{5},\ a \ge 1 \cdots\cdots$ ㉢

모든 x에 대하여 ㉡이 성립하려면

$D = (a+3)^2 - 8(3-a^2) \le 0,$

$(3a+5)(a-1) \le 0$

$\therefore\ -\frac{5}{3} \le a \le 1 \cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통범위를 구하면

$-\frac{5}{3} \le a \le -\frac{3}{5},\ a = 1$

18. x, y가 실수이고 $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$을 만족할 때, $\frac{y}{x}$의 최대값 M, 최소값 m의 합 $M + m$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

$\frac{y}{x} = k$라 하자. $y = kx$이므로

$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$에서

$(k - 2k + 1)x^2 - (2 + 2k)x + 4 = 0$

x, y는 실수이므로, 판별식은 0보다 크거나 같다.

$\therefore D' = (k+1)^2 - 4(k^2 - 2k + 1) \geq 0$

$3k^2 + 10k - 3 \geq 0$

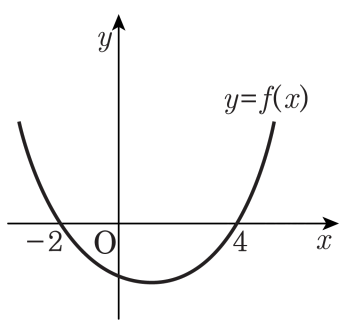
$3k^2 - 10k + 3 \leq 0$

$(k - 3)(3k - 1) \leq 0$

$\frac{1}{3} \leq k \leq 3$

$\therefore m + M = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$

19. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x-1)>f(2x)$ 를 만족하는 x 의 값의 범위는?



① $-2<x<0$ ② $-1<x<1$ ③ $0<x<2$
④ $1<x<3$ ⑤ $2<x<4$

해설

$f(x)=a(x+2)(x-4)$ $(a>0)$ 로 놓으면
$f(x-1)=a(x+1)(x-5)$
$f(2x)=a(2x+2)(2x-4)=4a(x+1)(x-2)$
이 때, $f(x-1)>f(2x)$ 에서
$a(x+1)(x-5)>4a(x+1)(x-2)$
$a(x+1)(x-5-4x+8)>0$
$a>0$ 이므로 $(x+1)(-3x+3)>0$
$3(x+1)(x-1)<0$
$\therefore\ -1<x<1$

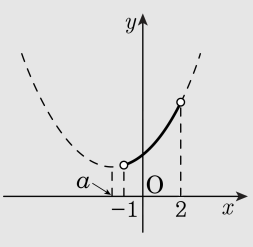
20. $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 2ax + 2a + 3 > 0$ 이 항상 성립하도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$f(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3$ 이라 하면

$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + 2a + 3$



$-1 < x < 2$ 에서

부등식 $f(x) > 0$ 이 항상 성립하려면

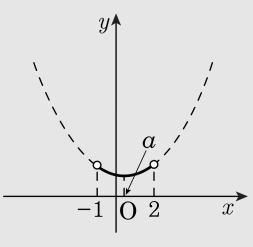
(i)$a < -1$ 일 때,

다음 그림에서 $f(-1) > 0$

$4a + 4 > 0 \quad \therefore\ a > -1$

그런데 $a < -1$ 이므로 이를 만족시키는 a 의 값은 없다.

(ii) $-1 \le a < 2$ 일 때,



다음 그림에서 $f(a) > 0$

$-a^2 + 2a + 3 > 0$ 에서

$(a+1)(a-3) < 0$

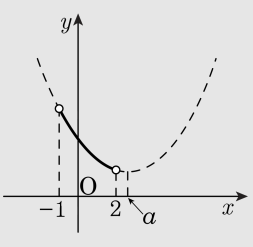
$\therefore\ -1 < a < 3$

그런데 $-1 \le a < 2$ 이므로 $-1 < a < 2$

그런데 $a = -1$ 인 경우 $f(a) = 0$ 이어도

$-1 < x < 2$ 에서는 $f(x) > 0$ 이므로 성립한다.

따라서 $-1 \le a < 2$



(iii) $a \ge 2$ 일 때, 다음 그림에서

$f(2) > 0\ -2a + 7 > 0 \quad \therefore\ a < \frac{7}{2}$

그런데 $a \ge 2$ 이므로 $2 \le a < \frac{7}{2}$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는

$-1 \le a < \frac{7}{2}$

따라서, 정수 a 는 $-1, 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 으로 5개다.

21. x에 대한 방정식 $x^2-2kx+(2k^2-3k)=0$의 두 실근을 α,β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2\le 8$를 만족하는 k의 최댓값과 최솟값을 각각 M,m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$x^2-2kx+(2k^2-3k)=0$의 두 실근을
α,β라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-(2k^2-3k)\ge 0$

$\therefore\ 0\le k\le 3\cdots①$

또, $\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=2k^2-k$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\le 8$

$(2k)^2-4(2k^2-3k)\le 8$

$k^2-3k+2\ge 0\quad (k-1)(k-2)\ge 0$

$\therefore\ k\le 1,\quad k\ge 2\cdots②$

①, ②에서 $0\le k\le 1$ 또는 $2\le k\le 3$

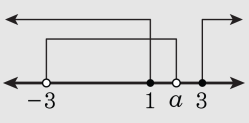
$\therefore\ M=3,\quad m=0$

$\therefore\ M+m=3$

22. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b<0 \\ |x-2|\geq 1 \end{cases}$ 의 해가 $-3<x\leq 1$ 이고, $|a|+|b|=5$ 를 만족하는 두 실수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설



$|x-2|\geq 1 \Rightarrow x\geq 3$ 또는 $x\leq 1$
또, 해가 $-3<x\leq 1$ 이므로
$x^2+ax+b=0$ 의 한 근이
-3 임을 알 수 있다.
따라서, 두 근을 $\alpha, -3$ 이라고 하면
근과 계수의 관계에서
$-a=(\alpha-3)<0 \Rightarrow a>0 \cdots ①$
$b=\alpha\times(-3)<0 \cdots ②$
①, ②에서 $|a|+|b|=5 \Rightarrow a-b=5$
$x=-3$ 대입 $9-3a+b=0$
$\Rightarrow a=2,\ b=-3$
$\therefore\ a+b=-1$

23. $(x+1)(x-2)$의 소수 첫째 자리를 반올림한 것이 $1+5x$와 같을 때, 양수 x를 구하면?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{16}{5}$ ⑤ $\frac{32}{5}$

해설

조건에서 소수 첫째 자리를 반올림했으므로

$1+5x$는 정수 ……①

$(1+5x)-0.5 \le (x+1)(x-2) < (1+5x)+0.5$ ……②

②를 풀면 $11.5 \le (x-3)^2 < 12.5$ ……③

①에서 $5x$는 정수이므로 $x-3=\frac{n}{5}$ (n은 정수)

이것을 ③에 대입하면 $25\times 11.5 \le n^2 < 25\times 12.5$

$\therefore 287.5 \le n^2 < 312.5$

이를 만족시키는 정수는 $n=\pm 17$

$\therefore x=3\pm\frac{17}{5}=-\frac{2}{5},\ \frac{32}{5}$

$\therefore x=\frac{32}{5}$ ($\because x$는 양수)