

1. 삼차방정식  $x^3 + 27 = 0$ 의 모든 근의 합은?

- ① 0                      ② 1                      ③ 2                      ④ 3                      ⑤ 4

해설

$$x^3 + 3^3 = 0, (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$$

$$\therefore x = -3, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{합} : -3 + \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{2} + \frac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} = 0$$

해설

$x^3 + 27 = 0$ 에서  $x^2$ 의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

2. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$x^4 = 16$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 16 = 0$  에서  
 $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$   
 $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$   
 $\therefore x = \pm 2$  또는  $x = \pm 2i$   
 $\therefore$  모든 해의 합은  $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

3. 사차방정식  $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을  $a$ , 가장 큰 근을  $b$ 라 할 때,  $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

가장 작은 근  $a = -\sqrt{6}$ , 가장 큰 근  $b = \sqrt{6}$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

4. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서  
 $x^2 = t$ 로 놓으면  
 $t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$   
 $\therefore t = 4$  또는  $t = 9$   
( i )  $t = 4$  일 때,  $x^2 = 4$   
 $\therefore x = \pm 2$   
( ii )  $t = 9$  일 때,  $x^2 = 9$   
 $\therefore x = \pm 3$   
따라서 모든 해의 합은  
 $(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

5. 사차방정식  $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 의 모든 실근의 곱은?

- ① -2      ② -1      ③ 0      ④ 1      ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 에서  
 $x^2 = t$ 로 치환하면  
 $t^2 + 3t - 10 = 0, (t + 5)(t - 2) = 0$   
 $\therefore t = -5$  또는  $t = 2$   
 $\therefore x = \pm\sqrt{5}i$  또는  $x = \pm\sqrt{2}$   
따라서 모든 실근의 곱은  
 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

6. 삼차방정식  $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$ 의 근 중에서 무리수인 두 근을  $a, b$ 라 할 때,  $a + b$ 의 값을 구하면?

① -6

② -2

③ 2

④ 4

⑤ 8

해설

방정식을 인수분해하면  $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$

$(x - 3)(x^2 - 4x - 3) = 0$

$x^2 - 4x - 3 = 0$ 의 두 근이  $a, b$ ( $\because$  무리수)

$a + b = 4$

7. 사차방정식  $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4 = 0$  의 서로 다른 두 허근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

-1

1

-2

1

0

-4

-1

3

-4

4

2

1

-3

4

-4

0

2

-2

4

1

-1

2

0

$(x+1)(x-2)(x^2-x+2)=0$

따라서 두 허근은  $x^2-x+2=0$  의 근

허근의 합은 근과 계수와의 관계에 의해  $\alpha+\beta=1$

8.  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$  의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 :  $x = 1$

▷ 정답 :  $x = -2$

▷ 정답 :  $x = 3$

해설

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  으로 놓으면  
 $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$  이므로, 조립제법에 의하면

|   |  |   |    |    |    |
|---|--|---|----|----|----|
| 1 |  | 1 | -2 | -5 | 6  |
|   |  |   | 1  | -1 | -6 |
|   |  | 1 | -1 | -6 | 0  |

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$
$$= (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$
$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

9. 방정식  $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$  을 풀면?

- ①  $x = -2$  또는  $x = -3$  또는  $x = -2 \pm \sqrt{3}$
- ②  $x = 2$  또는  $x = 4$  또는  $x = -3$  또는  $x = -5$
- ③  $x = -2 \pm \sqrt{5}$  또는  $x = -1 \pm \sqrt{6}$
- ④  $x = -3 \pm \sqrt{5}i$  또는  $x = -2 \pm \sqrt{6}i$
- ⑤  $x = -1$  또는  $x = -5$  또는  $-3 \pm \sqrt{6}$

해설

$$x(x+6) = x^2 + 6x$$
$$(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$$
$$x^2 + 6x = X \text{로 놓으면}$$
$$x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$$
$$X(X+8) + 15 = 0,$$
$$X^2 + 8X + 15 = 0$$
$$(X+3)(X+5) = 0$$
$$\therefore X = -3, X = -5$$
$$\textcircled{+} : X = -3 \Rightarrow x^2 + 6x + 3 = 0,$$
$$x = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6}$$
$$\textcircled{-} : X = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0,$$
$$(x+5)(x+1) = 0, x = -1, -5$$

10. 다음 방정식의 해가 아닌 것은?

$$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$$

- ① -3      ② -2      ③ -1      ④ 1      ⑤ 2

**해설**

$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$  에서  $x^2 + x = X$  라 하면  
 $X^2 - 8X + 12 = 0, (X - 2)(X - 6) = 0$

$\therefore X = 2$  또는  $X = 6$

( i )  $X = 2$  일 때,  $x^2 + x = 2$  에서

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -2$$

( ii )  $X = 6$  일 때,  $x^2 + x = 6$  에서

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

( i ), ( ii ) 에서 주어진 방정식의 해는

$x = -3$  또는  $x = -2$  또는  $x = 1$  또는  $x = 2$

따라서, 해가 아닌 것은 ③

11. 방정식  $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x + 1) - 10 = 0$  의 모든 실근의 합은?

① -10

② -2

③ -1

④ 2

⑤ 10

해설

$(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x + 1) - 10 = 0$  에서

$x^2 + x = A$  라 하면

$A^2 + 2A - 8 = 0,$

$(A + 4)(A - 2) = 0$

$\therefore A = -4$  또는  $A = 2$

( i )  $x^2 + x = -4$  일 때,

$x^2 + x + 4 = 0$

$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

( ii )  $x^2 + x = 2$  일 때,

$x^2 + x - 2 = 0,$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$\therefore x = -2$  또는  $x = 1$

( i ), ( ii )에서 실근은  $x = -2$  또는  $x = 1$  이므로 실근의 합은

$-2 + 1 = -1$

12. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$  에서  
 $x^2 - 2x = t$  로 놓으면  
 $t(t - 2) - 3 = 0,$   
 $t^2 - 2t - 3 = 0$   
 $(t - 3)(t + 1) = 0$   
 $\therefore t = 3$  또는  $t = -1$   
( i )  $t = 3$  , 즉  $x^2 - 2x = 3$  일 때  
 $x^2 - 2x - 3 = 0$   
 $(x - 3)(x + 1) = 0$   
 $\therefore x = -1$  또는  $x = 3$   
( ii )  $t = -1$  , 즉  $x^2 - 2x = -1$  일 때  
 $x^2 - 2x + 1 = 0$   
 $(x - 1)^2 = 0$   
 $\therefore x = 1$  (중근)  
따라서,  $-1 \times 3 \times 1 = -3$

13. 방정식  $(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4$ 의 두 허근을  $\alpha, \beta$ 라 할 때,  $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① -5      ② -3      ③ -1      ④ 1      ⑤ 3

해설

$(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4$ 에서

$x^2 + x + 2 = A$ 라 하면

$A^2 = A + 2,$

$A^2 - A - 2 = 0, (A + 1)(A - 2) = 0$

$\therefore A = -1$  또는  $A = 2$

( i )  $x^2 + x + 2 = -1$ 일 때,  $x^2 + x + 3 = 0$

( ii )  $x^2 + x + 2 = 2$ 일 때,  $x^2 + x = 0$

( i ), ( ii )에서  $\alpha, \beta$ 는 허근이므로  $x^2 + x + 3 = 0$ 의 근이 된다.

따라서,  $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 3$ 이므로

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2 \times 3 = -5$

14. 방정식  $(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 에서  
 $x^4 + 4x^2 + 4 - 6x^2 - 7 = 0$   
 $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$   
 $x^2 = t$ 로 치환하면  
 $t^2 - 2t - 3 = 0, (t - 3)(t + 1) = 0$   
 $\therefore t = 3$  또는  $t = -1$   
( i )  $x^2 = 3$  일 때,  $x = \pm\sqrt{3}$   
( ii )  $x^2 = -1$  일 때,  $x = \pm i$   
( i ), ( ii )에서 실근의 합을 구하면  
 $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

15. 다음 중 사차방정식  $x^4 + x^2 + 1 = 0$ 의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

①  $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

②  $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

③  $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

④  $1 + \sqrt{3}i$

⑤  $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$

해설

$x^4 + x^2 + 1 = 0$ 을 변형하면

$$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0,$$

$$(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$$

$$(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = 0,$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ 또는 } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

16. 삼차방정식  $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$ 이 중근을 가질 때, 실수  $a$ 의 값들의 합을 구하면?

① 2                      ② 4                      ③ 6                      ④ 7                      ⑤ 10

해설

$(x-1)(x^2-ax+2a)=0$ 에서

i) 1이 중근일 경우

$x^2-ax+2a=0$ 에  $x=1$ 을 대입하면 성립해야 하므로

$1-a+2a=0$ ,  $a=-1$

ii) 1이 중근이 아닌 경우

$x^2-ax+2a=0$ 이 중근을 가지므로 판별식  $D=0$ 에서

$D=a^2-8a=0$ ,  $a(a-8)=0$ ,  $a=0, 8$

$\therefore 0+8-1=7$

17.  $1 - \sqrt{2}$  가 방정식  $2x^2 + px + q = 0$  의 해이고 유리수  $p, q$  가  $x^3 + ax^2 + 2x + b = 0$  의 해 일 때  $b$  의 값은?

① 2                      ② -2                      ③ 4                      ④ -6                      ⑤ -8

해설

유리수 계수의 이차방정식이므로 한 근이  $1 - \sqrt{2}$  이면 다른 한 근은  $1 + \sqrt{2}$  이다.  
두 근의 합은 2  
두 근의 곱은 -1  
 $\therefore p = -4, \quad q = -2$  ( $\because$  근과 계수의 관계를 이용)  
 $p = -4, \quad q = -2$  을 주어진 삼차방정식에 대입하면  
 $-64 + 16a - 8 + b = 0, \quad -8 + 4a - 4 + b = 0$  연립하여 풀면  
 $a = 5, \quad b = -8$

18. 삼차방정식  $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 세 근을  $\alpha, \beta, \gamma$ 라 할 때,  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 의 값은?

① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 3$ ,  $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2$ ,  $\alpha\beta\gamma = -1$ 이므로  
 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 3^2 - 2 \cdot (2) = 9 - 4 = 5$

19. 삼차방정식  $x^3 - 4x^2 + x + k = 0$ 의 한 근이  $-1$ 일 때,  $k$ 의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^3 - 4(-1) + k = 0 \quad \therefore k = 6$$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ 의 나머지 두 근을  $\alpha, \beta$ 라 하면

세 근의 합  $4 = -1 + \alpha + \beta$ 에서  $\alpha + \beta = 5$

$$\therefore k + \alpha + \beta = 11$$

20.  $x$ 에 관한 삼차방정식  $x^3 - 3x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 세 근을  $\alpha, \beta, \gamma$ 라고 할 때  $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 3, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \quad \alpha\beta\gamma = -4 \text{ 이므로} \\ (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) &= 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma \\ &= 1 - 3 + 2 + 4 = 4 \end{aligned}$$

21.  $x$ 의 삼차방정식  $x^3 + px^2 + qx - 105 = 0$ 의 세 근이 모두 2보다 큰 정수일 때,  $p + q$ 의 값을 구하면?

① 56      ② 21      ③ 10      ④ -10      ⑤ -21

해설

세 근을  $\alpha, \beta, \gamma$  라 하면 근과 계수와의 관계에 의해서

$$\alpha + \beta + \gamma = -p, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \alpha\beta\gamma = 105$$

$$\text{마지막 식에서 } \alpha\beta\gamma = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$\therefore$  세 근은 3, 5, 7 이다.

$$\therefore p = -(3 + 5 + 7) = -15,$$

$$q = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 3 = 15 + 35 + 21 = 71$$

$$\therefore p + q = 56$$

22. 삼차방정식  $x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 세 근을  $\alpha, \beta, \gamma$ 라 할 때,  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 세 근으로 하는  $x$ 의 삼차방정식은  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 이다. 이때,  $a + b + c$ 의 값은?

- ① -2                      ② -1                      ③ 0                      ④ 1                      ⑤ 2

해설

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -3$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2$$

$$\alpha\beta\gamma = 1$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} -a &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \\ &= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{-2}{1} = -2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-3}{1} = -3 \end{aligned}$$

$$\therefore b = -3$$

$$-c = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1$$

$$\therefore c = -1$$

$$\therefore a + b + c = -2$$

23. 계수가 실수인 삼차방정식  $x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$  의 한 근이  $1 - i$  일 때,  $a + b$  의 값은?

① -1      ② 0      ③ 1      ④ 2      ⑤ 3

해설

세 근을  $1 - i, 1 + i, \gamma$  라 하면

$$(1 - i)(1 + i)\gamma = 4, 2\gamma = 4, \gamma = 2$$

$$a = -(1 - i + 1 + i + 2) = -4$$

$$b = (1 - i)(1 + i) + (1 + i)2 + 2(1 - i) = 6$$

$$\therefore a + b = 2$$

24. 삼차방정식  $x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$  의 한 근이  $1 + 2i$  일 때, 두 실수  $a + b$  의 합  $a + b$  의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

한 근이  $1 + 2i$  이므로 복소수의 켤레근인  $1 - 2i$  도 근이다. 또 다른 근은  $\alpha$  라 하자.

$$(1 + 2i)(1 - 2i)\alpha = 5, 5\alpha = 5$$

$$\alpha = 1$$

$$-a = (1 + 2i) + (1 - 2i) + 1 = 3$$

$$a = -3$$

$$b = (1 + 2i)(1 - 2i) + (1 - 2i) + (1 + 2i) = 7$$

$$\therefore a + b = 4$$

25.  $1-\sqrt{2}i$ 를 근으로 갖고 계수가 실수인 삼차방정식  $x^3+ax^2+bx+c=0$ 과 이차방정식  $x^2+ax+4=0$ 이 공통근을 갖는다. 이 때,  $a+b+c$ 의 값은?

- ① -5
- ② -4
- ③ -3
- ④ -2
- ⑤ -1

해설

$x^3+ax^2+bx+c=0$ 의 세근을  $1-\sqrt{2}i, 1+\sqrt{2}i, \alpha$ 라 하면근과 계수와의 관계에 의해  
 $2+\alpha=-a, 2\alpha+3=b, 3\alpha=-c \quad \cdots (가)$   
한편  $x^2+ax+4=0$ 과의 공통근이  $1-\sqrt{2}i, 1+\sqrt{2}i$ 이면 두근의 곱이 3이 되므로 적합하지 않다.  
따라서 공통근은  $x$ 이고  $x^2+ax+4=0$   
 $\therefore \alpha=2$  (가)의 세 식에 각각  $\alpha=2$ 를 대입하면  $a=-4, b=7, c=-6$   
 $\therefore a+b+c=-3$

26. 삼차방정식  $x^3 - ax - b = 0$ 의 한 근이  $1 - \sqrt{2}$ 일 때, 유리수  $a, b$ 에 대하여  $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

방정식  $x^3 - ax - b = 0$ 의 계수가 유리수이므로  
세 근을  $1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, \alpha$ 라고 하면  
 $(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) + \alpha = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$   
 $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})\alpha + (1 - \sqrt{2})\alpha = -a \quad \cdots \textcircled{㉡}$   
 $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})\alpha = b \quad \cdots \textcircled{㉢}$   
 $\textcircled{㉠}$ 에서  $\alpha = -2$ 를  $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면  
 $-a = 1 - 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = -5 \quad \therefore a = 5$   
 $\alpha = -2$ 를  $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면  $b = -2(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2$   
 $\therefore a + b = 5 + 2 = 7$

27.  $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때,  $x^{51}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 :  $-1$

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서

$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$

$\therefore x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1$

$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

28.  $x^3 = 1$ 의 한 허근을  $\omega$ 라 할 때,  $\omega^{50} + \omega^{51} + \omega^{52}$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이  $\omega$ 일때  
 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ 에서  
 $\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이 성립한다.  
주어진 문제식을  $\omega^{50}$ 으로 묶으면  
 $\omega^{50}(\omega^2 + \omega + 1)$ 이고  
 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이므로 답은 0이다.

29.  $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을  $\omega$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?  
(단,  $\bar{\omega}$ 는  $\omega$ 의 켈레복소수이다.)

|                                                       |                                                    |
|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\omega^6 = 1$               | <input type="checkbox"/> $\omega^2 = \bar{\omega}$ |
| <input type="checkbox"/> $\omega + \bar{\omega} = -1$ | <input type="checkbox"/> $\omega^2 + \omega = -1$  |

- ☐ ☐ , ☐
☐ ☐ , ☐
☐ ☐ , ☐ , ☐
- ☐ ☐ , ☐ , ☐ , ☒ ☐ , ☐ , ☐ , ☐

해설

$x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이  $\omega$ 이므로,  
 $\omega^3 = 1, (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$   
 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$  켈레근  $\bar{\omega}$ 일 경우도  
 $\bar{\omega}^3 = 1, \bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0$   
☐  $\omega^3 = 1, (\omega^3)^2 = 1 \rightarrow (\bigcirc)$   
☐  $\omega + \bar{\omega} = -1,$   
 $\bar{\omega} = -1 - \omega = -(\omega + 1)$   
 $\omega^2 + \omega + 1$ 을 이용.  
 $\omega + 1 = -\omega^2$ 이므로  $\bar{\omega} = \omega^2 \rightarrow (\bigcirc)$   
☐ 두 근  $\omega, \bar{\omega}$ 의 합은  
 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근의 합이므로  
 $\omega + \bar{\omega} = -1$   
☐  $\omega^2 + \omega + 1 = 0,$   
 $\omega^2 + \omega = -1 \rightarrow (\bigcirc)$

30. 어떤 정육면체의 밑변의 가로와 세로의 길이를 1 cm 줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의  $\frac{5}{2}$  배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 :                      cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가  $x$  cm라 하면  
조건으로부터  $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$ ,  
$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$$
,  
$$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$$
 에서  
$$3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$$
을 풀면  $x = 2$ (cm)

31. 두 다항식  $f(x) = x^3 - 5$ ,  $g(x) = x^3 + 3x + 1$ 에 대하여  $f(x) = 0$ 의 세 근을  $\alpha, \beta, \gamma$ 라고 할 때,  $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$ 의 값은?

① 350      ② 351      ③ 352      ④ 353      ⑤ 354

해설

$f(x) = 0$ 의 세 근이  $\alpha, \beta, \gamma$ 라고 하면  $\alpha^3 = 5, \beta^3 = 5, \gamma^3 = 5$ 이다.

$g(\alpha) = \alpha^3 + 3\alpha + 1 = 3\alpha + 6, g(\beta) = \beta^3 + 3\beta + 1 = 3\beta + 6,$

$g(\gamma) = \gamma^3 + 3\gamma + 1 = 3\gamma + 6$   $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$

$= (3\alpha+6)(3\beta+6)(3\gamma+6) = 351$  ( $\because \alpha+\beta+\gamma = 0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 0, \alpha\beta\gamma = 5$ )

32. 다음은 삼차방정식  $x^3 + px + 1 = 0$ 의 한 근을  $\alpha$ 라고 할 때,  $-\alpha$ 는  $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이고,  $\frac{1}{\alpha}$ 은  $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근임을 보인 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

$\alpha$ 는  $x^3 + px + 1 = 0$ 의 근이므로  $\alpha^3 + p\alpha + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$   
 $f(x) = x^3 + px - 1$ 이라고 하면  $f(-\alpha) = (\text{가}) = (\text{나}) = 0 \quad (\because \textcircled{1})$   
따라서  $-\alpha$ 는  $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이다. 또  $g(x) = x^3 + px^2 + 1$ 이라고 하면  $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = (\text{다}) = (\text{라}) = (\text{마}) = 0 \quad (\because \textcircled{1})$   
따라서,  $\frac{1}{\alpha}$ 은  $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근이다.

- ① (가)  $(-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1$       ② (나)  $-(\alpha^3 - p\alpha + 1)$   
③ (다)  $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1$       ④ (라)  $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (1 + p\alpha + \alpha^3)$   
⑤ (마)  $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdot 0$

**해설**

$\alpha$ 는  $x^3 + px + 1 = 0$ 의 근이므로  $\alpha^3 + p\alpha + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$   
 $f(x) = x^3 + px - 1$ 이라고 하면  $f(-\alpha) = (-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1$   
 $= -(\alpha^3 + p\alpha + 1) = 0 \quad (\because \textcircled{1})$   
따라서  $-\alpha$ 는  $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이다.  
또  $g(x) = x^3 + px^2 + 1$ 이라고 하면  $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1$   
 $= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (1 + p\alpha + \alpha^3) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdot 0 = 0 \quad (\because \textcircled{1})$   
따라서  $\frac{1}{\alpha}$ 은  $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근이다.

33. 방정식  $x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 정수  $a$ 의 값들의 합은?

① 30      ② 25      ③ 23      ④ 18      ⑤ 13

해설

$x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면  $x^2 = y$ 라고 치환하여  $y^2 - ay + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

i)  $D = a^2 - 4(8 - a) = a^2 + 4a - 32 = (a + 8)(a - 4) > 0$   
 $\therefore a < -8$  또는  $a > 4$

ii)  $a > 0$

iii)  $8 - a > 0 \Rightarrow a < 8$

$\therefore 4 < a < 8$  이므로  $a = 5, 6, 7$

34. 사차방정식  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ 의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

- ① 0개      ② 1개      ③ 2개      ④ 3개      ⑤ 4개

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 = 0 &\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0 \\ \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = -1 \end{aligned}$$

35. 사차방정식  $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 근 중에서 제일 큰 근을  $\alpha$ , 제일 작은 근을  $\beta$ 라 할 때,  $\alpha - \beta$ 의 값은?

①  $\sqrt{5}$

②  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

③  $1 - \sqrt{5}$

④  $2 - \sqrt{5}$

⑤  $3 - \sqrt{5}$

해설

양근을  $x^2$ 으로 나누면

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 라 하면

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = 2, 3$$

i)  $t = 2$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

ii)  $t = 3$ 일 때

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

36. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = 0$ 을 대입하면  
 $1 = 0$ 이 되어 모순이므로  $x \neq 0$ 이다.  
따라서, 주어진 식의 양변을  
 $x^2$ 으로 나누면  
$$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$
$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$
여기서  $x + \frac{1}{x} = X$ 로 놓으면  
$$X^2 + 5X - 14 = 0, (X + 7)(X - 2) = 0$$
$$\therefore X = -7 \text{ 또는 } X = 2$$
( i )  $X = -7$ 일 때,  
 $x + \frac{1}{x} = -7$ 에서  
$$x^2 + 7x + 1 = 0$$
$$\therefore \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$
( ii )  $X = 2$ 일 때,  
 $x + \frac{1}{x} = 2$ 에서  
$$x^2 - 2x + 1 = 0, (x - 1)^2 = 0$$
$$\therefore x = 1$$
( i ), ( ii )로부터  
$$x = 1(\text{중근}) \text{ 또는 } x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$
따라서, 모든 근의 합은  
$$1 + \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} = -6 \text{이다.}$$

37. 오차방정식  $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 허근을  $\alpha, \beta$ 라 할 때,  $\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① 0      ② 1      ③ 2      ④ 3      ⑤ 4

해설

방정식  $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서

$$(x+1)(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = 0$$

$\therefore x+1=0$  또는

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$$

( i )  $x+1=0$ 에서  $x=-1$

( ii )  $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 양변을

$x^2$ 으로 나누면

$$x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(s^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5$$

$$= 0 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

이 때,  $x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 - 4t + 3 = 0, (t-1)(t-3) = 0$$

$\therefore t=1$  또는  $t=3$

①  $x + \frac{1}{x} = 1$  일 때,  $x^2 - x + 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

②  $x + \frac{1}{x} = 3$  일 때,  $x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

따라서, 주어진 방정식의

두 허근이  $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$  이므로

두 허근  $\alpha, \beta$ 의 합은

$\alpha + \beta = 1$ 이다.

38. 사차방정식  $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$  을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 :  $-1$

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$  의 양변을

$x^2$  으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$  로 치환하면

$$t^2 + t = 0, t(t+1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ x + \frac{1}{x} = 0 \text{ 일 때, } x^2 + 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm i$$

$$(ii) \ x + \frac{1}{x} = -1 \text{ 일 때,}$$

$$x^2 + 1 = -x, x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

39. 계수가 실수인 사차방정식  $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = 0$ 의 한근이  $1 + 2i$ 일 때, 두 실수  $a, b$ 의 합  $a + b$ 의 값은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

한 근이  $1 + 2i$ 이면  $x = 1 + 2i, x^2 = -3 + 4i, x^3 = -11 - 2i, x^4 = -7 - 24i,$   
 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15$   
 $= (-7 - 24i) + a(-11 - 2i) + b(-3 + 4i) + 14(1 + 2i) + 15 = 0,$   
 $(-11a - 3b - 7 + 14 + 15) + (-24 - 2a + 4b + 28)i$   
 $\therefore 11a + 3b = 22, -2a + 4b = -4$   
연립하여 풀면  $a = 2, b = 0$

해설

$x = 1 + 2i$ 에서  $x^2 - 2x + 5 = 0$   
 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + kx + 3)$   
좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면  
 $a = k - 2, b = 8 - 2k, 14 = 5k - 6$   
 $\therefore k = 4, a = 2, b = 0$

40.  $x$ 에 관한 삼차방정식  $kx^3 + (1-2k)x^2 + (k-2)x - 2k = 0$ 의 근이 모두 실수가 되기 위한 실수  $k$ 의 범위를 구하면?

- ①  $0 < k \leq \frac{1}{2}$       ②  $0 < k \leq 1$       ③  $-\frac{1}{2} < k \leq 0$   
④  $-\frac{1}{2} < k \leq \frac{1}{2}$       ⑤  $0 < k \leq \frac{1}{2}$

해설

준식 =  $(x-2)(kx^2 + x + k) = 0$ 에서  
 $kx^2 + x + k = 0$ 이 실근이어야하므로  
 $D = 1 - 4k^2 \geq 0$ ,  
 $k \neq 0$ 이므로  $0 < |k| \leq \frac{1}{2}$

41. 삼차방정식  $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ 의 세 근을  $\alpha, \beta, \gamma$ 라 할 때,  
 $\frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$ 의 값을 구하면?

- ①  $-\frac{1}{2}$       ②  $-\frac{3}{4}$       ③  $-1$       ④  $-\frac{3}{2}$       ⑤  $-2$

해설

삼차 방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3, \alpha\beta\gamma = -4$$

$\beta + \gamma = -2 - \alpha, \gamma + \alpha = -2 - \beta, \alpha + \beta = -2 - \gamma$ 를 이용하면

$$(\text{주어진 식}) = \frac{-2 - \alpha}{\alpha} + \frac{-2 - \beta}{\beta} + \frac{-2 - \gamma}{\gamma}$$

$$= -2 \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - 3$$

$$= -2 \left( \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} \right) - 3 = -\frac{3}{2}$$

42. 삼차방정식  $f(x) = 0$ 의 세 근  $\alpha, \beta, \gamma$ 에 대하여  $\alpha + \beta + \gamma = 3$  일 때, 방정식  $f(2x + 3) = 0$ 의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 :  $-3$

해설

세 근의 합은  $\left(-\frac{x^2}{x^3}\text{의 계수}\right)$ 이므로  
 $x^3$ 의 계수와  $x^2$ 의 계수만 구하면 된다.  
최고차항의 계수가 1인 삼차방정식을  
 $f(x)$ 라 하면 세 근의 합이 3이므로  
 $f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + d$   
 $f(2x + 3)$   
 $= (2x + 3)^3 - 3 \cdot (2x + 3)^2 + b \cdot (2x + 3) + d$   
3차항과 2차항의 계수를 중심으로  
식을 정리하면  
 $8x^3 + 24x^2 + \dots \dots = 0$   
 $\therefore$  세 근의 합  $= -3$

해설

$f(2x + 3) = 0$ 의 세 근을  
각각  $p, q, r$ 이라 하면,  
 $2p + 3 = \alpha \dots \textcircled{\text{㉠}}$   
 $2q + 3 = \beta \dots \textcircled{\text{㉡}}$   
 $2r + 3 = \gamma \dots \textcircled{\text{㉢}}$   
 $\textcircled{\text{㉠}} + \textcircled{\text{㉡}} + \textcircled{\text{㉢}}$ 에서  
 $2(p + q + r) + 9 = 3$   
 $\therefore p + q + r = -3$

43. 계수가 실수인 사차방정식  $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$ 의 한 근이  $1 + 2i$ 일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4      ② -3      ③ 0      ④ 3      ⑤ 4

해설

두 허근은  $1 + 2i$ ,  $1 - 2i$  나머지 두 실근을  $\alpha, \beta$ 라 하면  
네 근의 합 :  $(1 + 2i) + (1 - 2i) + \alpha + \beta = -2$   
 $\therefore$  두 실근의 합 :  $\alpha + \beta = -4$

44.  $x^3 = 1$ 의 한 허근을  $\omega$ 라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는?

보기

㉠  $\omega^3 = 1$

㉡  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉢  $\bar{\omega} = \omega^2 = \frac{1}{\omega}$

㉣  $\omega + \bar{\omega} = 1$

㉤  $\omega\bar{\omega} = 1$

㉥  $\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}} = -1$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1 \cdots \text{㉠}(\bigcirc)$$

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots \text{㉡}(\bigcirc)$$

$\therefore$  근과 계수와의 관계에 의해

$$\omega + \bar{\omega} = -1, \omega\bar{\omega} = 1 \cdots \text{㉢}(\times), \text{㉤}(\bigcirc)$$

$$\omega + \bar{\omega} = -1 \text{ 이므로}$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = \omega^2 - 1 - \bar{\omega} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \bar{\omega} \cdots \text{㉣}(\bigcirc)$$

$$\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}}$$

$$= (\omega^3)^{668} \omega + \frac{1}{(\omega^3)^{668} \omega}$$

$$= \omega + \frac{1}{\omega} = -1$$

$$(\because \omega^2 + \omega + 1 = 0) \cdots \text{㉥}(\bigcirc)$$

45. 사차방정식  $x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하면?

① -5

② -6

③ 0

④ 5

⑤ 6

해설

짝수차 상반방정식이므로

양변을  $x^2$ 으로 나누면

$$x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 라 놓으면

$$t^2 + 5t - 6 = 0, (t + 6)(t - 1) = 0$$

$$\therefore t = 1, -6$$

$$\text{즉, } x + \frac{1}{x} = 1, x + \frac{1}{x} = -6$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠식은 허근을 가지므로 조건에 맞지 않고

㉡식에서 두 실근의 합은

근과 계수와의 관계에서

$$\therefore \alpha + \beta = -6$$

46.  $x$ 에 대한 방정식  $f(x) = x^3 + x^2 + (a^2 - 4a - 2)x + (2a^2 - 8a) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖도록  $a$ 의 값을 정할 때, 정수  $a$ 의 개수는?

① 3개      ② 4개      ③ 5개      ④ 6개      ⑤ 7개

해설

$$f(x) = (x + 2)(x^2 - x + a^2 - 4a) = 0$$

여기서,  $x = -2$ 는  $x^2 - x + a^2 - 4a = 0$ 의 근이 될 수 없다.

$$(\because (-2)^2 - (-2) + a^2 - 4a = (a - 2)^2 + 2 \neq 0)$$

따라서, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면,

$$x^2 - x + a^2 - 4a = 0 \text{이 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.}$$

$$\therefore D = 1 - 4(a^2 - 4a) > 0, 4a^2 - 16a - 1 < 0$$

$$\therefore \frac{4 - \sqrt{17}}{2} < a < \frac{4 + \sqrt{17}}{2}$$

따라서,  $a$ 의 정수값은 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

47. 실수  $x, y, z$ 가  $x + y + z = 2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ ,  $x^3 + y^3 + z^3 = 20$ 을 만족할 때,  $x - 2y + z$ 의 값을 구하면? (단,  $x < y < z$ )

▶ 답 :

▷ 정답 :  $-1$

해설

$x + y + z = 2 \dots \textcircled{1}$   
 $x^2 + y^2 + z^2 = 14 \dots \textcircled{2}$   
 $x^3 + y^3 + z^3 = 20 \dots \textcircled{3}$   
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서  
 $xy + yz + zx = -5 \dots \textcircled{4}$   
 $x^3 + y^3 + z^3$   
 $= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$   
 $= 20$   
 $\therefore xyz = -6 \dots \textcircled{5}$   
 $\textcircled{1}, \textcircled{4}, \textcircled{5}$ 을 이용하여  $x, y, z$ 를  
세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면  
 $t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0(t - 1)(t + 2)(t - 3) = 0$   
 $t = 1, -2, 3$   
 $x < y < z$ 이므로  $x = -2, y = 1, z = 3$   
 $\therefore x - 2y + z = -1$

48. 연립방정식  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3, \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 3, \frac{1}{xyz} = 1$ 을 풀면 해는  $x = a, y = b, z = c$ 이다. 이 때,  $a + b + c$ 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3,$

$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 3,$

$\frac{1}{xyz} = 1$

이것은  $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ 을 세 근으로 하는

3차방정식의 근과 계수와의 관계이다.

만족하는 3차방정식은

$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0,$

$(\alpha - 1)^3 = 0, \alpha = 1,$

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = 1, x = y = z = 1$

$\therefore a + b + c = 3$

49. 다음과 같은 식의 변형을 이용하여 알 수 있는 것은? (단,  $\bar{z}$  는  $z$  의 켈레복소수를 나타낸다.)

$$\begin{aligned}\overline{az^3 + bz^2 + cz + d} &= \overline{az^3} + \overline{bz^2} + \overline{cz} + \overline{d} \\ &= \overline{a}\bar{z}^3 + \overline{b}\bar{z}^2 + \overline{c}\bar{z} + \overline{d} \\ &= \overline{a}(\bar{z})^3 + \overline{b}(\bar{z})^2 + \overline{c}(\bar{z}) + \overline{d}\end{aligned}$$

- ①  $z$  가  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  의 근이면,  $\bar{z}$  는  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  의 근이다.

②  $z$  가  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  의 근이면,  $\bar{z}$  는  $\overline{ax^3 + bx^2 + cx + d} = 0$  의 근이다.

③  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  의 근과  $\overline{ax^3 + bx^2 + cx + d} = 0$  의 근은 같다.

④  $\bar{z}$  가  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  의 근이면,  $z$  는  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  의 근이다.

⑤  $\bar{z}$  가  $\overline{ax^3 + bx^2 + cx + d} = 0$  의 근이면,  $z$  는  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  의 근이다.

해설

$z$  가  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  의 근이면,  
 $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$   
 $\overline{ax^3 + bz^2 + cz + d}$   
 $= \overline{az^3} + \overline{bz^2} + \overline{cz} + \overline{d}$   
 $= \overline{a}(\bar{z})^3 + \overline{b}(\bar{z})^2 + \overline{c}(\bar{z}) + \overline{d}$   
 $= 0$  이므로  
 $\bar{z}$  는  $\overline{ax^3 + bx^2 + cx + d} = 0$  의 근이다.

50. 삼차 방정식의  $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을  $w$ 라 하고, 자연수  $n$ 에 대하여  $f(n) = \frac{w^n}{1 + w^{2n}}$ 이라 할 때,  $f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(19)$ 의 값은?

- ①  $-1$       ②  $-\frac{1}{2}$       ③  $0$       ④  $\frac{1}{2}$       ⑤  $1$

해설

$$x^3 - 1 = 0 \rightarrow w^3 = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\rightarrow w^2 + w + 1 = 0$$

$$f(3n) = \frac{w^{3n}}{1 + w^{6n}} = \frac{(w^3)^n}{1 + (w^3)^{2n}} = \frac{1}{2}$$

$$f(3n+1) = \frac{w^{3n+1}}{1 + w^{6n+2}} = \frac{w}{1 + w^2} = -1$$

$$f(3n+2) = \frac{w^{3n+2}}{1 + w^{6n+4}} = \frac{w^2}{1 + w} = -1$$

즉  $-1, -1, \frac{1}{2}$ 가 계속 반복되고

항이 번갈아 가면서 부호가 바뀌므로

순서대로 6개의 항까지의 값이 0이 된다.

$$\therefore f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(19)$$

$$= (-1) - (-1) + \frac{1}{2} - (-1) + \cdots + f(19)$$

$$= 0 + f(19) = -1$$