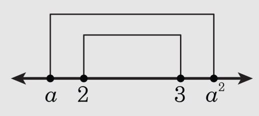
1. 구간 $[2,3]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $x^2-a(a+1)x+a^3\le 0$을 만족하는 실수 a의 최솟값과 최댓값의 곱은?(단, $a>1$)

① 2　　② $2\sqrt{3}$　　③ 3　　④ $3\sqrt{2}$　　⑤ 5

해설



$[2,3]\Leftrightarrow 2\le x\le 3$

$x^2-a(a+1)x+a^3\le 0$

$(x-a)(x-a^2)\le 0$

$a<x<a^2(\because\ a>1)\quad a\le 2, a^2\ge 3$

$\therefore\ a$의 최댓값 : 2

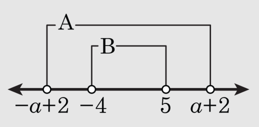
a의 최솟값 : $\sqrt{3}\rightarrow\therefore\ 2\sqrt{3}$

2. 양의 실수 a에 대하여 부등식 $-3 < x + 1 < 6$의 모든 해가 부등식 $|x - 2| < a$를 만족할 때, a값의 범위는?

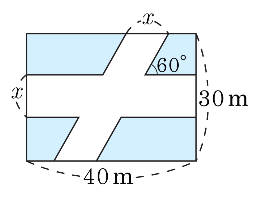
① $0 < a \leq 3$　② $0 < a < 3$　③ $0 \leq a \leq 3$
④ $a \geq 3$　⑤ $a \geq 6$

해설

$\therefore\ a \geq 6$



3. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 $40\,\mathrm{m}$, $30\,\mathrm{m}$ 인 직사각형꼴의 땅에 같은 폭의 두 도로를 $60°$로 교차하도록 만들었다. 이 때, 남은 땅의 넓이가 $600\,\mathrm{m}^2$ 이상이 되도록 할 때, 도로 폭의 최대 길이는?



① 4m ② 6m ③ 8m ④ 10m ⑤ 12m

해설

남은 땅의 넓이를 S 라 하면
$S = 40 \times 30 - (40x + 30x - x^2) \geq 600$
$\therefore\ x^2 - 70x + 600 \geq 0$
$(x - 10)(x - 60) \geq 0$ 에서 $x \leq 10$ 또는
$x \geq 60\ (0 < x < 30)$ 이 된다.
그러므로 도로폭의 최대 길이는
$0 < x \leq 10$ 이므로 $10\,\mathrm{m}$ 이다.

4. 둘레의 길이가 $24\,\mathrm{cm}$ 인 직사각형의 넓이를 $35\,\mathrm{cm}^2$ 이상 되도록 할 때, 그 한 변의 길이 a 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $9\,\mathrm{cm}$ ② $10\,\mathrm{cm}$ ③ $12\,\mathrm{cm}$ ④ $15\,\mathrm{cm}$ ⑤ $19\,\mathrm{cm}$

해설

한 변의 길이가 a 이므로 다른 한 변의 길이는 $12-a$ 이다.
$a(12-a) \geq 35$ 에서 $(a-5)(a-7) \leq 0$
$\therefore\ 5 \leq a \leq 7$
따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 $12\,\mathrm{cm}$

5. 다음은, 둘레의 길이가 28 cm 이고 넓이가 45 cm^2 이상인 직사각형에서 가로의 길이의 범위를 구하는 문제의 풀이 과정이다.

> 가로의 길이를 x cm 라고 하면, 세로의 길이는 ㈎ cm 이다.
> 이때, x 의 값의 범위는 ㈏이다.
> 또 직사각형의 넓이는 (가로)(세로)= x ㈎이다.
> 이것이 45 cm^2 이상이 되어야 하므로 $x\times$ ㈎ $\geq$ ㈐
> 이식을 정리하면 ㈑ ≤ 0
> ㈑를 인수분해하면 ㈒이다.
> 따라서 가로의 길이를 5 cm 이상, 9 cm 이하로 하면 문제의 뜻에 맞는다.

다음 중 ㈎, ㈏, ㈐, ㈑, ㈒ 에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은?

① ㈎ $(14-x)$
② ㈏ $0 < x < 14$
③ ㈐ 45
④ ㈑ $14x - x^2 - 45$
⑤ ㈒ $(x-5)(x-9)$

해설

(사각형의 둘레의 길이)
= 2(가로의 길이 + 세로의 길이)
$28 = 2x + 2 \cdot$ ㈎, $14 = x +$ ㈎
$\therefore$ ㈎ $= 14 - x$
가로의 길이의 범위 : $x > 0$, $14 - x > 0 \rightarrow x < 14$
$\therefore\ 0 < x < 14\ \cdots$ ㈏
직사각형의 넓이 : $x(14-x) \geq 45$
$\therefore$ ㈐ $= 45$
㈑ $= x^2 - 14x + 45 \leq 0$
㈒ $= (x-5)(x-9) \leq 0$

6. 평지의 공원에 둘레의 길이는 $200\,\mathrm{m}$로 일정하고 넓이는 $900\,\mathrm{m}^2$ 이상인 직사각형 모양의 화단을 만들려고 한다. 이 때, 만들어지는 화단의 가로의 최대 길이는?

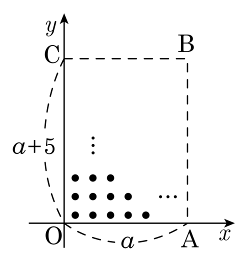
① $40\,\mathrm{m}$　② $50\,\mathrm{m}$　③ $90\,\mathrm{m}$

④ $100\,\mathrm{m}$　⑤ $150\,\mathrm{m}$

해설

화단의 가로 길이를 $x\,\mathrm{m}$라고 하면
세로의 길이는 $(100-x)\,\mathrm{m}$이다.
가로, 세로의 길이는 모두 양수이므로
$x>0,\ 100-x>0$에서 $0<x<100 \cdots$ ㈎
$900\,\mathrm{m}^2$ 이상이므로
$x(100-x)\geq 900$
$x^2-100x+900\leq 0,\ (x-10)(x-90)\leq 0$
$\therefore 10\leq x\leq 90$
이것은 ㈎를 만족하므로
가로의 최대 길이는 $90\,\mathrm{m}$이다.

7. 다음 그림과 같이 원점을 모서리로 하고, $\overline{\mathrm{OA}} = a$, $\overline{\mathrm{OC}} = a + 5$ 인 직사각형 OABC 가 있다. 사각형 OABC 내부의 격자점의 수가 50 개 이하가 되도록 할 때, a 의 최댓값은? (단, $a > 0$ 이고, 격자점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점이다.)



① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$(a-1)(a+4) \leq 50$

$a^2 + 3a - 54 = (a+9)(a-6) \leq 0$

$\therefore 0 < a \leq 6$

8. 두 대의 승용차 A, B가 같은 거리를 가는데 A는 거리의 반은 시속 vkm로 달리고, 나머지 거리는 시속 u km로 달린다고 한다, 또한 B는 소요된 시간의 반은 시속 u km로 달리고 나머지 소요된 시간은 v km로 달린다고 한다. 승용차 A, B의 평균 속력이 각각 x km/시, y km/시일 때, x와 y의 대소 관계를 바르게 나타내 것은?

① $x \le y$ ② $x \ge y$ ③ $x = y$ ④ $x < y$ ⑤ $x > y$

해설

승용차 A가 달린 거리를 s,

시간을 t라 하면 $t = \frac{s}{2u} + \frac{s}{2v}$

평균 속력은

$$\frac{s}{t} = \frac{s}{\frac{s}{2u} + \frac{s}{2v}} = \frac{s}{\frac{su + sv}{2uv}} = \frac{2uv}{u + v} = x$$

승용차 B의 평균 속력은 $\frac{1}{2}(u + v) = y$

$$y - x = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{2uv}{u + v}$$

$$= \frac{(u + v)^2 - 4uv}{2(u + v)} \ge 0$$

따라서 $y - x \ge 0$이므로 $x \le y$이다.

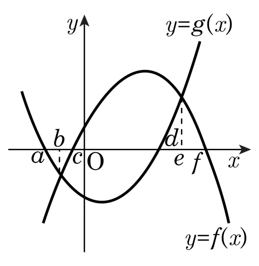
9. 어부 김씨는 둘레 길이가 $28\,\mathrm{cm}$ 인 직사각형 모양의 양식장의 넓이를 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이 도도록 지으려고 한다. 이 때 양식장의 한 변의 길이를 최대 얼마로 해야 하는가?

① $5\,\mathrm{m}$ ② $6\,\mathrm{m}$ ③ $7\,\mathrm{m}$ ④ $8\,\mathrm{m}$ ⑤ $9\,\mathrm{m}$

해설

양식장의 가로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$ 라고 하면
둘레의 길이는 $28\,\mathrm{m}$ 이므로
세로의 길이는 $(14-x)\,\mathrm{m}$ 이다.
양식장의 넓이가 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이므로
$x(14-x) \geq 48,\ 14x - x^2 - 48 \geq 0$
$x^2 - 14x + 48 \leq 0, (x-6)(x-8) \leq 0$
$\therefore 6 \leq x \leq 8$
따라서 한 변의 길이를 최대 $8\,\mathrm{m}$ 로 해야 한다.

10. 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는?



① $a<x<c,\ d<x<f$

② $a<x<b,\ e<x<f$

③ $b<x<c,\ d<x<e$

④ $a<x<c,\ e<x<f$

⑤ $x<a,\ c<x<d,\ x>f$

해설

$f(x)g(x)>0$ 이면

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases} \quad \text{또는} \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 모두 x 축보다 위쪽에 있거나 또는 모두 x 축보다 아래쪽에 있어야 한다.

$\therefore a<x<c,\ d<x<f$

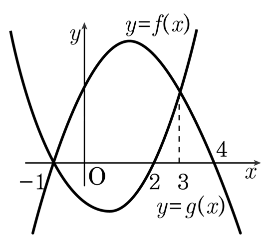
11. 이차함수 $y = x^2 - ax + 4$의 그래프가 직선 $y = x - 2$ 보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위가 $x < 2$ 또는 $x > 3$ 일 때, 상수 a의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$x^2 - ax + 4 > x - 2$ 에서 $x^2 - (a+1)x + 6 > 0$ $\cdots\cdots$ ㉠
한편, 해가 $x < 2$ 또는 $x > 3$ 이고 이차항의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-2)(x-3) > 0$
$\therefore x^2 - 5x + 6 > 0$ $\cdots\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡이 일치하므로 $a + 1 = 5$
$\therefore a = 4$

12. 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) - g(x) \le 0$ 의 해를 구하면?



① $x \le -1$　　② $-1 \le x \le 2$

③ $-1 \le x \le 3$　　④ $2 \le x \le 3$

⑤ $2 \le x \le 4$

해설

$f(x) - g(x) \le 0$ 에서 $f(x) \le g(x)$ 이 부등식을 만족하는 x 의 값의 범위는 $y = f(x)$ 의 그래프가 $y = g(x)$ 의 그래프와 같거나 아래쪽에 있는 부분이므로 $-1 \le x \le 3$

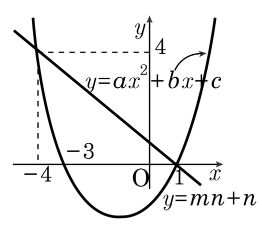
13. 이차함수 $y=6x^2+ax+b$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{3}<x<\frac{5}{2}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① -12 ② -9 ③ -6 ④ -3 ⑤ 0

해설

이차부등식 $6x^2+ax+b<0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{5}{2}$
이므로 $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{2}$는 이차방정식 $6x^2+ax+b=0$의
두 실근이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$\frac{1}{3}+\frac{5}{2}=-\frac{a}{6}$에서 $a=-17$
$\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{b}{6}$에서 $b=5$
$\therefore\ a+b=-12$

14. 다음 그림은 일차함수 $y = mx + n$과 이차 함수$y = ax^2 + bx + c$의 그래프이다. 다음 [보기] 중 옳은 것의 개수는?



보기

㉮ 연립방정식
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$$ 의 해는
$x = -4,\ y = 4$와 $x = 1,\ y = 0$ 이다.

㉯ 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$의 해는 $x \leq -3$ 또는 $x \geq 1$이다.

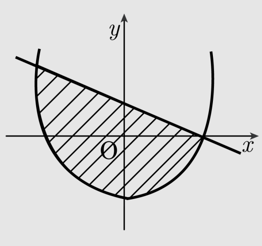
㉰ 부등식 $ax^2 + bx + c \leq mx + n$의 해는 $-4 \leq x \leq 1$이다.

㉱ 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$에서 $a = 1$이다.

㉲ 일차함수 $y = mx + n$ 에서 $m = -\frac{4}{5}$이다.

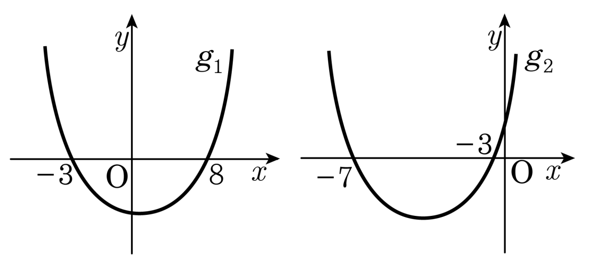
① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설



㉮ 교차점이 연립방정식의 해이다 (참)
㉰ 빗금 친 부분에 해당한다. 즉, $-4 \leq x \leq 1$
㉱, ㉲ 먼저 $(-4, 4)(1, 0)$ 을 지나는 직선의
방정식을 구하면
$$y = \left(\frac{4-0}{-4-1}\right)(x+4) + 4 = -\frac{4}{5}x + \frac{4}{5}$$
연립방정식에 구한 직선의 방정식을 넣으면
$$\begin{aligned} ax^2 + \left(b + \frac{4}{5}\right)x + c - \frac{4}{5} &= a(x+4)(x-1) \\ &= ax^2 + 3ax - 4a \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \quad b + \frac{4}{5} = 3a, \quad c - \frac{4}{5} = -4a$$
그리고 이차함수는 $(-3, 0)$ 을 지나므로
$9a - 3b + c = 0$
위의 세 식을 연립하면 $a = \frac{4}{5}$
$\therefore$ ㉮, ㉯, ㉰, ㉲ : 참

15. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



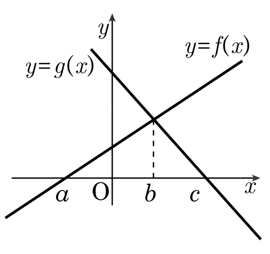
▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x+12)(x-2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

16. 두 개의 일차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차부등식 $f(x)g(x) \geq 0$ 의 해는?



① $a \leq x \leq b$　　② $a \leq x \leq c$

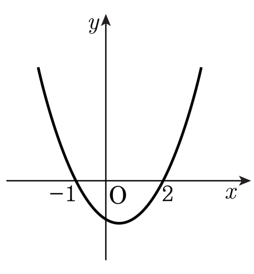
③ $b \leq x \leq c$　　④ $x \leq b,\ x \geq c$

⑤ $x \leq a,\ x \geq c$

해설

$f(x)g(x) \geq 0$ 을 만족하는 경우는 다음과 같이
두 가지의 경우가 있다.
$f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$ 또는 $f(x) \leq 0$, $g(x) \leq 0$
그런데 그래프에서 $f(x) \leq 0,\ g(x) \leq 0$의 경우는
없으므로 $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$을 만족하는
x의 범위를 구하면 된다.
주어진 함수의 그래프를 살펴 보면
$x \leq a$일 때, $f(x) \leq 0$, $g(x) \geq 0$
$a \leq x \leq c$일 때, $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$
$x \geq c$일 때, $f(x) \geq 0,\ g(x) \leq 0$
따라서 구하는 해는 $a \leq x \leq c$

17. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, x 에 대한 이차부등식 $cx^2 + bx + a > 0$ 의 해는?



① $-1 < x < \frac{1}{2}$

② $x < -1$ 또는 $x > \frac{1}{2}$

③ $x < -\frac{1}{2}$ 또는 $x > 1$

④ x는 모든 실수

⑤ 해가 없다.

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 아래로 볼록이고
x 축과의 교점의 x 좌표가 $-1,\ 2$ 이므로
$a > 0$ 이고
$ax^2 + bx + c = a(x+1)(x-2) = ax^2 - ax - 2a$
$\therefore\ b = -a,\ c = -2a\ (a > 0)$

이때, $cx^2 + bx + a > 0 \Leftrightarrow -2ax^2 - ax + a > 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 < 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(2x-1) < 0$

따라서, 구하는 부등식의 해는 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 이다.

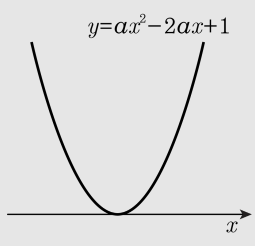
18. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$
(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
(i), (ii) 에서 $a = 1$

19. 이차함수 $y=-x^2+(a-1)x+3a$ 의 그래프가 직선 $y=x-2$ 보다 항상 아래쪽에 있기 위한 실수 a 값의 범위는?

① $-3<a<1$ ② $-6<a<-2$ ③ $a\ge 3$, $a\le -1$
④ $a\ge 0$ ⑤ $a\le 5$

해설

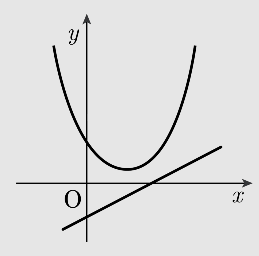
$x-2>-x^2+(a-1)x+3a$
$\Rightarrow x^2-(a-2)x-2-3a>0$
항상 성립하려면, 판별식이 0 보다 작아야 한다.
$\Rightarrow D=(a-2)^2-4(-2-3a)<0$
$\Rightarrow a^2+8a+12<0$
$\Rightarrow -6<a<-2$

20. 포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있도록 실수 k 의 범위를 구하면?

① $k < -1$　　② $-1 < k < 0$　　③ $k > 0$

④ $0 < k < 1$　　⑤ $k > 1$

해설



포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있으려면
위 그림에서 모든 실수 x 에 대하여
부등식 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$가 항상 성립해야 한다.
즉 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 에서
판별식이 0 보다 작아야 하므로
$\frac{D}{4} = 4 - (3 - k) < 0$
$\therefore\ k < -1$

21. 좌표 평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0 ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여 부등식
$2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠이
항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0 \cdots$ ㉡식이
항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

22. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m 의 범위를 정하면?

① $m < -2,\ \ m > \frac{2}{3}$

② $m < -1,\ \ m > \frac{2}{3}$

③ $m < -2,\ \ m > 2$

④ $m < 2,\ \ m > \frac{2}{3}$

⑤ $m < -5,\ \ m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을
항상 만족시키도록 m 을 정하면 된다.
$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$ 에서 판별식
$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0$,
$(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$
$(3m-2)(m+2) > 0$
$\therefore\ \ m < -2\ ,\ m > \frac{2}{3}$

23. 이차함수 $y = -2x^2 - 2x + 1$ 의 그래프가 직선 $y = mx + n$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1 < x < \frac{3}{2}$ 일 때, 상수 m, n 의 곱 mn 의 값은?

① -6 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

부등식 $-2x^2 - 2x + 1 > mx + n$,
즉 $2x^2 + (m+2)x + n - 1 < 0$ 의 해가
$-1 < x < \frac{3}{2}$ 이므로
방정식 $2x^2 + (m+2)x + n - 1 = 0$ 의 해가
$x = -1$ 또는 $x = \frac{3}{2}$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{m+2}{2} = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{2} = (-1) \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ 이므로
$m = -3$, $n = -2$
$\therefore\ mn = 6$

24. 모든 실수 x 에 대하여 곡선 $y = x^2 + (k-2)x + 3$ 의 그래프가 직선 $y = x + 2$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있기 위한 실수 k 의 값의 범위는?

① $1 < k < 5$　② $1 \le k \le 5$　③ $k \le -1, k \le 5$

④ $k < 1, k > 5$　⑤ $k \le 1, k \ge 5$

해설

곡선의 그래프가 직선의 그래프보다 위쪽에 있으려면 $x^2 + (k-2)x + 3 > x + 2$

$\therefore\ x^2 + (k-3)x + 1 > 0$

위의 부등식이 항상 만족해야 하므로

방정식 $x^2 + (k-3)x + 1 = 0$ 의 판별식 D 가 $D < 0$ 이어야 한다.

$D = (k-3)^2 - 4 < 0$

$k^2 - 6k + 5 < 0$

$\therefore\ 1 < k < 5$

25. 이차함수 $y = x^2 + x + 1$ 의 그래프가 함수 $y = kx^2 + kx - 1$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-5 \le k < 1$　② $-2 < k \le 3$　③ $-7 < k \le 1$

④ $1 < k \le 5$　⑤ $1 \le k < 7$

해설

$x^2 + x + 1 > kx^2 + kx - 1$ 에서

$(k-1)x^2 + (k-1)x - 2 < 0$

(i) $k - 1 = 0$, 즉 $k = 1$ 일 때

$-2 < 0$ 이므로 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k - 1 \ne 0$, 즉 $k \ne 1$ 일 때

주어진 부등식이 항상 성립하려면 $k - 1 < 0$

$\therefore k < 1 \cdots$ ㉠

한편, 이차방정식 $(k-1)x^2 + (k-1)x - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = (k-1)^2 + 8(k-1) < 0$ 에서

$(k+7)(k-1) < 0$

$\therefore -7 < k < 1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $-7 < k < 1$

(i), (ii) 에서 $-7 < k \le 1$

26. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프가 이차함수 $y = 2x^2 - 2mx + 1$ 의 그래프보다 항상 아래쪽에 존재하도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $-3 < m < 3$　　② $-3\ m < 1$

③ $-1 < m < 3$　　④ $m < -1$또는$m > 1$

⑤ $m < -1$또는$m > 3$

해설

$x^2 - 2x - 3 < 2x^2 - 2mx + 1$ 에서
$x^2 - 2(m-1)x + 4 > 0$
이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = (m-1)^2 - 4 < 0$ 에서
$(m+1)(m-3) < 0$
$\therefore -1 < m < 3$

27. 두 함수 $f(x) = mx^2 - 4x + 4$, $g(x) = -2x^2 + 2mx$ 가 있다. 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) < y < f(x)$ 를 만족시키는 실수 y 가 존재할 때, 실수 m 의 범위를 정하면?

① $-3 < m < 0$　② $-2 < m \leq 3$　③ $0 \leq m < 2$

④ $-2 \leq m < 2$　⑤ $-2 < m \leq 4$

해설

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) - g(x) > 0$ 을
만족시키는 조건을 구한다.
$f(x) - g(x) = (m+2)x^2 - 2(m+2)x + 4 > 0$
(i) $m + 2 = 0$ 이면 $f(x) - g(x) = 4 > 0$
따라서 $m = -2$ 일 때, 성립한다.
(ii) $m + 2 > 0$, $\frac{D}{4} < 0$ 에서
$-2 < m < 2$
(i), (ii) 에서 $-2 \leq m < 2$

28. $1 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 이 항상 성립할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$ ② $a < 2$ ③ $a < 3$ ④ $a < 4$ ⑤ $a < 5$

해설

부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a-1)x - 4 < 0$
$1 \le x \le 2$ 에서
이 부등식이 항상 성립해야 하므로
방정식 $x^2 + (a-1)x - 4 = 0$ 의 한 근이1 보다 작고, 다른 한 근은 2 보다 커야 한다.
$f(x) = x^2 + (a-1)x - 4$ 로 놓으면
$f(1) = 1 + (a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots$ ㉠
$f(2) = 4 + 2(a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a < 1$

29. $-2 \le x \le 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2 - 6x \ge a^2 - 6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-4 \le a \le 0$　② $-2 \le a \le 2$　③ $0 \le a \le 4$
④ $2 \le a \le 4$　⑤ $4 \le a \le 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고
$-2 \le x \le 2$ 에서
$f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.
$f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로
$-2 \le x \le 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,
$f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \ge 0$
$a^2 - 6a + 8 \le 0 \quad \Rightarrow \quad (a-2)(a-4) \le 0$
$\therefore\ 2 \le a \le 4$

30. $0 < x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \le (a-1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a = -1$ ② $a > -1$ ③ $a \ge -1$
④ $a < -1$ ⑤ $a \le -1$

해설
$f(x) = x^2 - (a-1)x - 3$ 이라 두어,
$0 < x < 1$ 에서 $f(x) \le 0$ 되도록 하자.
$f(0) \le 0$ 그리고 $f(1) \le 0$ 이면 된다.
그런데, $f(0) = -3$ 이므로
$f(1) = 1 - (a-1) - 3 \le 0$ 에서 $a \ge -1$

31. 부등식 $0 \le x \le 2$의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$의 영역에 포함되도록 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

부등식 $0 \le x \le 2$의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$의 영역에 포함되어야하므로

$0 \le x \le 2$ 에서

$x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이어야 한다.

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 라 하면

$0 \le x \le 2$ 에서

$f(x) \le 0$ 이어야 하므로

$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같아야 한다.

$f(0) = a^2 - 4 \le 0$ 에서

$-2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠

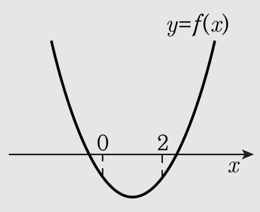
$f(2) = a^2 - 2a \le 0$ 에서

$0 \le a \le 2 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 의 공통 범위를 구하면 $0 \le a \le 2$

따라서, 최댓값은 $M = 2$, 최솟값은 $m = 0$ 이므로

$M - m = 2$



32. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$라 하고, 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$의 모든 해가 $\sqrt{2} \leq x < 3$의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

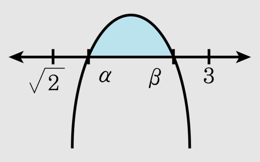
㉠ $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$　　　㉡ $ac > 0$

㉢ $4a + c < 2b$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이 $a < 0,\ \sqrt{2} \leq \alpha < \beta < 3$을 만족하여야 한다.



㉠ $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta$에서 $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

㉡ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} > 0$이므로 $ac > 0$이다.

㉢ $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$에서 $4a + c < 2b$

33. 어떤 상점에서 스캐너를 한 개에 10만원씩 판매할 때 한 달에 100개가 팔리고, 한 개의 가격을 x만원 인상하면 월 판매량이 $4x$개 줄어드는 것으로 조사되었다. 한 달의 총 판매액이 1200만원 이상이 되도록 하려면 한 개의 가격을 얼마로 하면 좋을까?

① 15만원 이상 20만원 이하 ② 10만원 이상 15만원 이하
③ 5만원 이상 10만원 이하 ④ 4만원 이상 8만원 이하
⑤ 2만원 이상 4만원 이하

해설

$(10+x)(100-4x) \geq 1200,\ 4x^2-60x+200 \leq 0$
$x^2-15x+50=(x-5)(x-10) \leq 0$
$\therefore 5 \leq x \leq 10$
10만원씩 판매할 때보다 5만 원 이상 10만 원 이하 인상해야 하므로 한 개의 가격을 15만 원 이상 20만 원 이하가 되도록 하면 된다.

34. 어느 회사가 판매하고 있는 상품의 1개당 판매 가격을 작년보다 x% 올리면 이 상품의 판매량이 작년보다 $\frac{x}{2}$% 감소한다고 한다. 이 회사가 올해 판매 금액의 10%를 상여금으로 지급할 때, 올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액이 작년 판매 금액보다 크거나 같게 되기 위한 x의 최댓값은?

① 60　② $\frac{200}{3}$　③ $\frac{230}{3}$　④ 80　⑤ 90

해설

이 회사가 판매하는 상품의 작년 1개당 판매 가격을 a, 판매량을 b라 하자.
올해 판매 가격을 x% 올리면
올해 판매 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$,
판매량은 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$이므로
올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액은

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}$$

작년 판매 금액이 ab이므로

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}\geq ab$$

이 부등식을 정리하면

$$9x^2-900x+20000\leq 0$$

$$(3x-100)(3x-200)\leq 0$$

$$\therefore \frac{100}{3}\leq x\leq\frac{200}{3}$$

35. x가 실수일 때, 두 함수 $f(x)=x^2+2x-8$, $g(x)=x^2-19$ 에 대하여 부등식 $(f\circ g)(x)\le 0$ 을 만족하는 양의 정수 x 는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x)=k$ 라고 하면

$(f\circ g)(x)\le 0 \Rightarrow f(k)\le 0$

$\Rightarrow -4\le k\le 2$

$\Rightarrow -4\le g(x)\le 2$

$\Rightarrow 15\le x^2\le 21$

$\therefore$ 양의 정수 $x=4$

36. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 0　　⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0$
㉡식이 항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow\ k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore\ 2-\sqrt{5} < k < 2+\sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

37. $-1 \le x \le 1$ 에서 x 에 대한 부등식 $x+a \le x^2 \le 2x+b$ 가 항상 성립할 때, $b-a$ 의 최솟값을 p 라 하자. 이 때, $100p$ 의 값은?

① 275 ② 310 ③ 325 ④ 330 ⑤ 335

해설

$$x+a \le x^2 \le 2x+b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \ge a \\ x^2 - 2x \le b \end{cases}$$

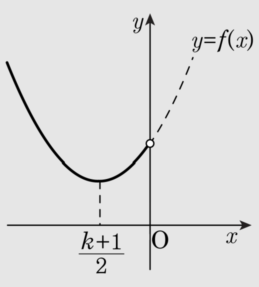
(i) $f(x) = x^2 - x$ 라 하면

$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-\frac{1}{4} \le f(x) \le 2$

즉, $-\frac{1}{4} \le x^2 - x \le 2$ 이므로 $a \le -\frac{1}{4}$



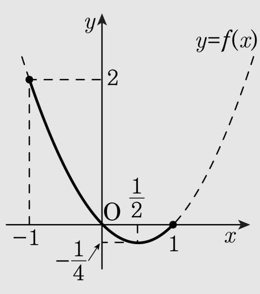
(ii) $g(x) = x^2 - 2x$ 라 하면

$g(x) = (x-1)^2 - 1$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = g(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-1 \le g(x) \le 3$

즉, $-1 \le x^2 - 2x \le 3$ 이므로 $b \ge 3$



(i), (ii) 에서 $b-a$ 의 최솟값 p 는

$p = 3 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4}$

$\therefore\ 100p = 325$

38. $|p|< 2$ 를 만족하는 모든 실수 p 에 대하여 부등식 $x^2+px+1 > 2x+p$ 가 성립하도록 하는 x 의 값의 범위는?

① $x \le -3$, $x = -1$, $x \ge 1$

② $x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$

③ $x \le -3$, $x \ge 1$

④ $x \le -1$, $x \ge 3$

⑤ $-3 \le x \le -1$

해설

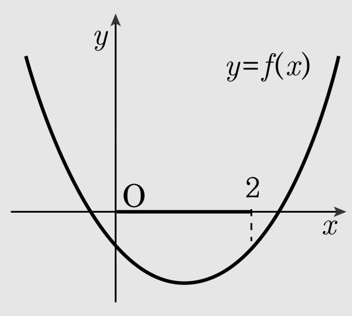
$x^2 + px + 1 > 2x + p$, $(x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$
$f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$ 이라 하면
$-2 < p < 2$ 에서 $f(p) > 0$ 이기 위한 조건은
$f(-2) \ge 0$ 이고 $f(2) \ge 0$ 이어야 한다.
$f(-2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \ge 0$
$\therefore\ (x-1)(x-3) \ge 0$
$\therefore\ x \le 1$, $x \ge 3 \cdots$ ㉠
$f(2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 1 \ge 0$
$\therefore\ (x+1)(x-1) \ge 0$
$\therefore\ x \le -1$, $x \ge 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\therefore\ x \le -1,\ x = 1,\ x \ge 3$
그런데 $x = 1$ 일 때,
$f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로
주어진 조건을 만족하지 않는다.
따라서 구하는 x 값의 범위는 $x \le -1,\ x \ge 3$

39. $0 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \ \le \ 0$ 이 항상 성립되게 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ -1

해설

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 로 놓을 때
주어진 부등식의 해가 0, 2 를 포함 하려면
$f(0) \le 0,\ f(2) \le 0$ 이어야 한다.



$f(0) = a^2 - 4 \le 0$
$\therefore\ -2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠
$f(2) = -2a + a^2 \le 0$
$\therefore\ 0 \le a \le 2 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위는 $0 \le a \le 2$
따라서 $M = 2,\ m = 0$ 이므로 $M - m = 2$