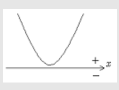
1. 모든 실수 x에 대하여 $x^2 + ax + 1 > 0$이 항상 성립하도록 하는 정수 a의 값의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

모든 x에 대해 $x^2 + ax + 1 > 0$이려면



위의 그림과 같이 되어야 하므로
판별식이 음수이어야 한다.

$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$에서 $a^2 < 4$

$\therefore -2 < a < 2$

$\therefore\ a = -1, 0, 1$ (3개)

2. 모든 실수 x에 대하여 $x^2 + px + p$가 -3보다 항상 크기 위한 정수 p의 최댓값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2 + px + p > -3$

$x^2 + px + (p+3) > 0$

$D = p^2 - 4(p+3) = p^2 - 4p - 12 < 0$

$(p-6)(p+2) < 0$

$-2 < p < 6$

$\therefore$ 최대정수 : 5

3. 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+2ax+1$의 값이 x^2+2x-1의 값보다 크도록 하는 a의 범위를 구하면?

① $1<a<3$　② $1\le a<3$　③ $1\le a\le 4$
④ $1\le a<4$　⑤ $1<a<4$

해설

$ax^2+2ax+1>x^2+2x-1$
$(a-1)x^2+2(a-1)x+2>0$
ⅰ) $a=1$ 항상 성립
ⅱ) $a>1$ 판별식 $D<0$에서
$\frac{D}{4}=(a-1)^2-2(a-1)<0$
$(a-1)(a-3)<0,\ 1<a<3$
ⅰ), ⅱ)에서 $1\le a<3$

4. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2kx-k+6>0$이 항상 성립하도록 k의 범위를 구하면 $m<k<n$이다. 이 때, m^2+n^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x^2+2kx-k+6>0$이 항상 성립하려면
판별식 $D<0$이다.
$\frac{D}{4}=k^2-(-k+6)<0$
$k^2+k-6<0$, $(k+3)(k-2)<0$
$-3<k<2$
$\therefore m=-3,\ n=2$
$\therefore\ m^2+n^2=(-3)^2+2^2=13$

5. 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2mx-m\ge 0$을 만족하는 실수 m의 범위는 $a\le m\le b$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=-1$

해설

$x^2-2mx-m\ge 0$이
항상 성립하려면 판별시 $D\le 0$
$\frac{D}{4}=m^2+m\le 0$
$m(m+1)\le 0,\ -1\le m\le 0$
$\therefore\ a+b=(-1)+0=-1$

6. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(m-1)x^2+2(m-1)x-5<0$ 이 항상 성립하기 위한 정수 m 의 개수는?

① 3 개　② 4 개　③ 5 개　④ 6 개　⑤ 7 개

해설

(i) $m=1$ 일 때, $-5<0$ 이므로
부등식은 항상 성립한다.
(ii) $m \neq 1$ 일 때
이차부등식이 항상 성립하려면
이차항의 계수가 음수이고 $D<0$ 이어야 한다.
$m-1<0$ 에서 $m<1$
$\frac{D}{4}=(m-1)^2+5(m-1)<0$ 에서
$(m-1)(m+4)<0$
$\therefore\ -4<m<1$
(i), (ii) 에서 $-4<m\leq 1$
따라서 정수 m 은 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$ 의
5 개이다.

7. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2-2(m-1)x+3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a<m<b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$(m+1)x^2-2(m-1)x+3>2$

$(m+1)x^2-2(m-1)x+1>0$ 이므로

$m\neq-1,\ m>-1$ 이고, $D<0$ 이다.

$\frac{D}{4}=m^2-3m<0 \quad \therefore\ 0<m<3$

$\therefore a=0,\ b=3$

$\therefore a+b=3$

8. 부등식 $x^2-2ax+a+2<0$ 의 해가 존재하지 않기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $-2 \le a \le 1$
② $a \le -1$ 또는 $a \ge 2$
③ $-1 \le a \le 2$
④ $-1 < a < 2$
⑤ $a < -1$ 또는 $a > 2$

해설

$x^2-2ax+a+2<0$ 의 해가 존재하지 않으려면
모든 실수 x 에 대하여
$x^2-2ax+a+2 \ge 0$ 이어야 한다.
이차방정식 $x^2-2ax+a+2=0$ 의 판별식을
D 라 하면 $\frac{D}{4}=a^2-a-2 \le 0$ 에서
$(a+1)(a-2) \le 0$
$\therefore -1 \le a \le 2$

9. 부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-\frac{1}{3} < x < 1$ 일 때, $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해를 구하면?

① $-\frac{1}{2} < x < 1$　② $-3 < x < 2$　③ $-3 < x < \frac{1}{2}$
④ $-2 < x < 1$　⑤ $-3 < x < 1$

해설

㉠ $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-\frac{1}{3} < x < 1$ 이면

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0 \ (a < 0)$

$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{3})(x - 1) < 0$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} < 0$

$\therefore \frac{b}{a} = -\frac{2}{3}, \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$

㉡ $cx^2 + bx + a < 0$ 에서 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + 1 > 0, -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 > 0$

$x^2 + 2x - 3 < 0, (x + 3)(x - 1) < 0$

$\therefore -3 < x < 1$

10. 부등식 $|4x-2|<6$의 해와 부등식$ax^2+2x+b>0$의 해가 서로 같을 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -2　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 4

해설

$|4x-2|<6,\ -6<4x-2<6$

$\therefore\ -1<x<2$

$(x+1)(x-2)<0 \Leftrightarrow ax^2+2x+b>0$

$x^2-x-2<0 \Leftrightarrow x^2+\frac{2}{a}x+\frac{b}{a}<0$

$\frac{2}{a}=-1, \frac{b}{a}=-2$

$a=-2, b=4$

$\therefore\ a+b=-2+4=2$

11. x 에 관한 부등식 $(a-1)x^2+(b+1)x+6>0$ 의 해가 $-3<x<1$ 일 때, ab 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(a-1)x^2+(b+1)x+6>0 \Leftrightarrow -3<x<1$

$x^2+\frac{b+1}{a-1}x+\frac{6}{a-1}<0 \quad (a-1<0)$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-1)<0$, $x^2+2x-3<0$

$\frac{b+1}{a-1}=2$, $\frac{6}{a-1}=-3$

$\therefore\ a=-1, b=-5$

$\therefore\ ab=5$

12. 부등식 $ax^2 + 5x + b > 0$ 을 풀어서 $2 < x < 3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $ab = 6$

해설

$ax^2 + 5x + b > 0$ ……㉠
해가 $2 < x < 3$ 이 되는 이차부등식은
$(x-2)(x-3) < 0$ 전개하면
$x^2 - 5x + 6 < 0$ ……㉡
㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해
양변에 -1 을 곱하면
$-x^2 + 5x - 6 > 0$ ……㉢
㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a = -1$, $b = -6$

13. $ax^2+bx+10>0$의 해가 $-2<x<5$가 되도록 하는 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$-2<x<5 \Leftrightarrow (x+2)(x-5)<0$
$x^2-3x-10<0 \cdots$①
한편 $ax^2+bx+10>0$의 양변에 -1을 곱하면,
$-ax^2-bx-10<0 \cdots$②
①과 ②의 계수를 비교하면 $a=-1, b=3$
$\therefore a+b=-1+3=2$

14. 이차부등식 $ax^2 + bx + 3 < 0$ 의 해가 $x < -1$ 또는 $x > 3$ 일 때, $-x^2 + bx + a \geq 0$ 의 해가 될 수 있는 것은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

해가 $x < -1$ 또는 $x > 3$ 이므로 a 는 0 보다 작다

$ax^2 + bx + 3 < 0 \Leftrightarrow a(x+1)(x-3) > 0$

$ax^2 - 2ax - 3a > 0$

$\therefore \quad a = -1, \quad b = 2$

$-x^2 + bx + a \geq 0$에 대입하면

$x^2 - 2x + 1 \leq 0$

$(x-1)^2 \leq 0$

$\therefore \ x = 1$

15. 두 이차부등식

$$\begin{cases} x^2-(m+3)x+3m<0 \\ x^2-6x+8>0 \end{cases}$$ 을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 5

뿐일 때, m의 값의 범위를 구하면?

① $3<m\le 4$　　② $4<m\le 5$　　③ $4\le m<5$

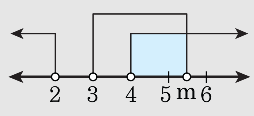
④ $5<m\le 6$　　⑤ $5\le m<6$

해설

$$\begin{cases} x^2-(m+3)x+3m<0 \cdots\cdots ① \\ x^2-6x+8>0 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①$(x-3)(x-m)<0$, $\therefore\ 3<x<m$

②$(x-2)(x-4)>0$, $\therefore\ x<2,\ x>4$



여기서 두 이차부등식에서

해 x 가 5 뿐이기 때문에,

m 은 5 를 넘어야 하고, 6을 넘으면 안되므로

$\therefore\ 5<m\le 6$

16. $-x^2+3x-2 \geq 0$ 일 때, $\dfrac{4x}{1-2x}$ 의 값의 범위는?

① $-6 \leq \dfrac{4x}{1-2x} \leq -\dfrac{10}{3}$
② $-4 \leq \dfrac{4x}{1-2x} \leq -\dfrac{8}{3}$
③ $-2 \leq \dfrac{4x}{1-2x} \leq -\dfrac{4}{3}$
④ $-1 \leq \dfrac{4x}{1-2x} \leq -\dfrac{1}{3}$
⑤ $0 \leq \dfrac{4x}{1-2x} \leq \dfrac{8}{3}$

해설

$-x^2+3x-2 \geq 0,\ x^2-3x+2 \leq 0$

$(x-1)(x-2) \leq 0$

$\therefore 1 \leq x \leq 2 \cdots$ ㈎

$\dfrac{4x}{1-2x} = \dfrac{-2(-2x+1)+2}{-2x+1}$

$= -2 + \dfrac{2}{-2x+1} \cdots$ ㈏

㈎에서 $1 \leq x \leq 2$ 이므로

-2를 곱하면 $-4 \leq -2x \leq -2$

1을 더하면 $-3 \leq -2x+1 \leq -1$

역수를 취하면 $-1 \leq \dfrac{1}{-2x+1} \leq -\dfrac{1}{3}$

2를 곱하면 $-2 \leq \dfrac{2}{-2x+1} \leq -\dfrac{2}{3}$

-2를 더하면 $-4 \leq -2 + \dfrac{2}{-2x+1} \leq -\dfrac{8}{3}$

따라서 $-4 \leq \dfrac{4x}{1-2x} \leq -\dfrac{8}{3}$

17. x 에 대한 이차부등식 $x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 일 때 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

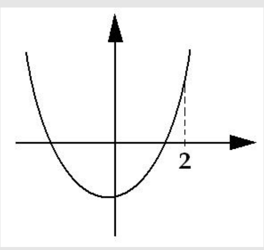
$x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 이려면
$(x - 1)(x - 4) > 0$ 에서 $x^2 - 5x + 4 > 0$ 이므로
$a = -5$, $b = 4$ 따라서 $a + b = -1$

18. $x > 2$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$을 성립하게 하는 실수 k의 최댓값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$의 두 조건을 모두 만족해야 한다.
대칭축 조건에서 $k < 2$ ······㉠
$f(2) = 3 - 3k \geq 0$에서 $k \leq 1$ ······㉡
㉠, ㉡에서 $k \leq 1$
k의 최댓값은 1이다.

19. 임의의 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - a|x| + 2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a 의 최댓값은? (단, $a > 0$)

① 3 ② $2\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 1

해설

$x^2 - a|x| + 2 = |x|^2 - a|x| + 2$ 이므로

$|x| = t$ $(t \geq 0)$ 로 치환하면 $t^2 - at + 2 \geq 0$

$f(t) = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$

$t \geq 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$t^2 - at + 2 \geq 0$ 이 성립하려면 $a > 0$ 이므로

그림에서 $f\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$

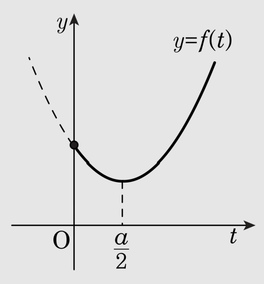
$-\frac{a^2}{4} + 2 \geq 0,\ a^2 - 8 \leq 0$

$-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$

그런데 $a > 0$ 이므로

$0 < a \leq 2\sqrt{2}$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.



20. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$을 만족하는 x의 범위가 $-2<x<1$일 때, 부등식 $cx^2-ax+b<0$을 만족하는 x의 범위는?

① $-2<x<1$ ② $-1<x<\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}<x<2$
④ $\frac{1}{2}<x<1$ ⑤ $\frac{1}{2}<x<2$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$이므로

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0(a<0)$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)=x^2+x-2<0$

$\therefore\ \frac{b}{a}=1, \frac{c}{a}=-2$

$cx^2-ax+b<0$에서

양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2-x+\frac{b}{a}>0 \Leftrightarrow -2x^2-x+1>0$

$2x^2+x-1<0, (2x-1)(x+1)<0$

$\therefore\ -1<x<\frac{1}{2}$