1. 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선이 점 $(6, 6)$ 을 지날 때, ab 의 값은?

① $-\frac{27}{8}$ ② $-\frac{15}{8}$ ③ $-\frac{7}{8}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

해설

원 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은
$ax+by=9$ 이고
이 접선이 점 $(6,\ 6)$ 을 지나므로

$$6a+6b=9 \qquad \therefore a+b=\frac{3}{2}$$

또, 점 (a, b) 는 원 위의 점이므로
$a^2+b^2=9$
이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 에서

$$9=\frac{9}{4}-2ab \qquad \therefore ab=-\frac{27}{8}$$

2. 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선과 직선 $y=x$ 와의 교점의 좌표는?

① $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$
② $(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$
③ $(4, 4)$
④ $(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}+2)$
⑤ $(2\sqrt{3}-2, 2\sqrt{3}-2)$

해설

원 $x^2+y^2=4$
위의 점 $\mathrm{P}(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은
$-x+\sqrt{3}y=4$ 이므로 이 방정식과
$y=x$ 를 연립하면 $-x+\sqrt{3}x=4$

$$\therefore\ x=\frac{4}{\sqrt{3}-1}=2\sqrt{3}+2$$

따라서 구하는 교점의 좌표는
$(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}+2)$

3. 원 $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하면?

① $y = 2x \pm \sqrt{10}$　② $y = 2x \pm 3\sqrt{2}$　③ $y = 2x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 2x \pm 2\sqrt{6}$　⑤ $y = 2x \pm \sqrt{30}$

해설

기울기가 2 인 직선의 방정식은
$y = 2x + k$ 직선이 원에 접하므로 직선과 원의 중심 사이 거리는 반지름과 같다.

$$\therefore \quad \frac{|2 \times 0 + (-1) \times 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \quad |k| = \sqrt{30}$$

$$\Rightarrow \quad k = \pm\sqrt{30}$$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y = 2x \pm \sqrt{30}$

4. 기울기가 -1 이고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y = -x \pm 2$ ② $y = -x \pm 3$ ③ $y = -x \pm 4$

④ $y = -x \pm 2\sqrt{2}$ ⑤ $y = -x \pm 4\sqrt{2}$

해설

구하는 직선의 기울기는 -1 이므로

$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$ 에서

$y = -x \pm 2\sqrt{1+1}$

$\therefore\ y = -x \pm 2\sqrt{2}$

5. 점 $(3,\ 1)$ 에서 $x^2+y^2=2$ 에 그은 두 접선의 방정식을 구하면 $x-y=2,\ ax+by=10$ 이다. 이 때, ab 의 값을 구하면?

① 1 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 12

해설

점 $(3,\ 1)$ 을 지나므로 $3a+b=10\ \cdots$ ㉠
원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같으므로
$\dfrac{|-10|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2},\quad a^2+b^2=50\ \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면,
$a^2+(10-3a)^2=50$
$10a^2-60a+50=0$
$a^2-6a+5=0$
$\therefore\ a=1,\ 5$
$\therefore\ a=5,\ b=-5$ 또는 $a=1,\ b=7$
한 접선의 방정식이 $x-y=2$ 이므로,
$a=1,\ b=7$
$\therefore\ ab=7$

6. 점 $(3,\ 1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선을 $y=mx+n$이라 할 때, mn의 값은?

① -4　　② -6　　③ -8　　④ -10　　⑤ -12

해설

점 $(3,\ 1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면, $y=m(x-3)+1$
이 직선은 원에 접하므로 원의 중심과의 거리가 반지름과 같다.

$$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$ 에서

$2m^2-3m-2=0$

$m=-\dfrac{1}{2},\ 2$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=2x-5$ $(\because m>0)$

$\therefore\ mn=-10$

7. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면

접선은 $y+1=m(x-3)\cdots①$

따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선

$mx-y-3m-1=0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.

$\dfrac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2+6m+1=5m^2+5,\ 4m^2+6m-4=0$

따라서, 기울기 $m=\dfrac{1}{2},-2$

여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면

$y=-2x+5$

따라서 y절편은 5이다.

8. 점 A$(0,\ a)$에서 원 $x^2+(y-3)^2=8$에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은?

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 10

해설

점 A$(0,\ a)$을 지나고 기울기가 m인 접선을 $y=mx+a$로 놓으면 원의 중심 $(0,\ 3)$에서 접선 $mx-y+a=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$(a-3)^2=8(m^2+1)$

$8m^2-a^2+6a-1=0$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta=-1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2+6a-1}{8}=-1$$

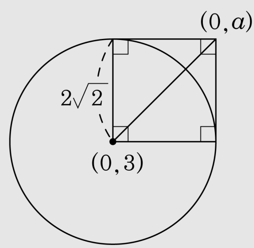
$a^2-6a-7=0,\quad (a-7)(a+1)=0$

$\therefore\ a=7\ (\because a>0)$

해설

원의 중심 $(0,\ 3)$에서 A$(0,\ a)$까지의 거리는

반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0+(a-3)^2}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$



$a-3=\pm 4$

$\therefore\ a=7$ 또는 $a=-1$

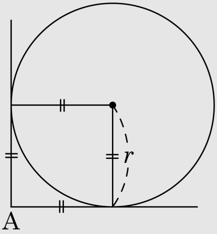
그런데 $a>0$ 에서 $a=7$

9. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$ 과 원 밖의 점 A(2, 1) 이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

① 3　② $\sqrt{10}$　③ $\sqrt{11}$　④ $\sqrt{13}$　⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 r 인 정사각형이 된다.
따라서 원 중심에서 A 까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.



$\therefore\ \sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{2}r$

$\therefore\ r=3$

10. 점 $(1,\ -1)$에서 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$에 그은 접선은 두 개 있다. 이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

① -3　② -4　③ -5　④ -6　⑤ -7

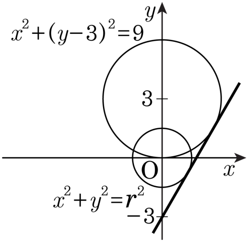
해설

점 $(1,\ -1)$을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$이라고 하면
원의 중심 $(-1,\ 2)$에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.

따라서 $1=\dfrac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$,

$|-2m-3|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+12m+8=0$
따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4이다.

11. 다음 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=r^2$, $x^2+(y-3)^2=9$ 의 공통 외접선 l의 y절편이 -3이다. 직선 l의 기울기를 m이라고 하면 $\dfrac{m^2}{r}$의 값은?(단, $0<r<3$)



① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

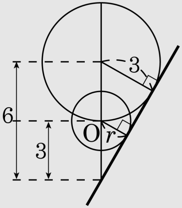
해설

y 절편이 -3 인 직선의 방정식을 $y=mx-3$ 이라 하면

$x^2+(y-3)^2=9$와 l 이 접하므로,

$$\frac{|-3-3|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3, \quad m^2=3$$

그리고 원만 따로 떼어내어 생각해 보면, 그림과 같이 두 직각삼각형은 닮음으로 닮음비가 2 : 1 이다.



$6:3=3:r \quad \therefore\ r=\dfrac{3}{2}$

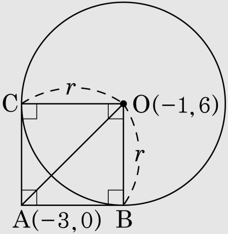
$\therefore\ \dfrac{m^2}{r}=2$

12. 점 A$(-3,\ 0)$에서 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, r의 값은? (단, $r>0$)

① 4　　② $3\sqrt{2}$　　③ $2\sqrt{5}$　　④ $2\sqrt{6}$　　⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$은 중심이
O$(-1,\ 6)$이고
반지름의 길이가 $r(r>0)$인 원이다.
점 A에서 이 원에 그은 두 접선이 서로 수직이면 다음 그림과 같이
□ABOC는 한 변의 길이가 r인 정사각형이 된다.



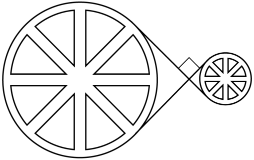
이 때, 두 점 A와 O 사이의 거리가
$r\sqrt{2}$가 되어야 하므로

$\sqrt{\{-1-(-3)\}^2+(6-0)^2}=r\sqrt{2}$

$\sqrt{40}=r\sqrt{2}$

$\therefore\ r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

13. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6, 2 인 두 원판을 ∞ 모양으로 벨트를 채웠는데 가운데 부분이 수직으로 만난다고 한다. 이 벨트의 길이를 $a+b\pi$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

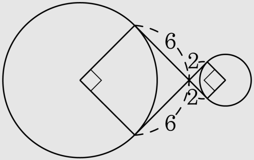


▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

두 원의 내접선의 길이는 다음 그림에서
$6+2=8$ 이다.



$\therefore$ 벨트의 길이는

$2\times8+\pi\times2\times6\times\dfrac{270}{360}+\pi\times2\times2\times\dfrac{270}{360}$

$=16+12\pi$

$\therefore\ a+b=28$