1. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3 + 3^3 = 0,\ (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$\therefore x = -3, \dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3 + \dfrac{3 + 3\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} = 0$

해설

$x^3 + 27 = 0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

2. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x + 0.5y = 2.8 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

① $(2, 3)$ ② $(-2, 3)$ ③ $(3, 2)$

④ $(3, -2)$ ⑤ $(-3, -2)$

해설

㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x + 5y = 28 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x + 3y = 12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢ − ㉣×3을 하면 $-4y = -8$

$\therefore$ $y = 2$를 ㉣대입하면 $x = 3$

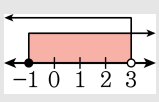
$\therefore$ $x = 3,\ y = 2$

3. 부등식 $-5 \le 2x - 3 < 3$ 을 만족하는 정수는 모두 몇 개인가?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$-5 \le 2x - 3 < 3$



$$\Rightarrow \begin{cases} -5 \le 2x - 3 \\ 2x - 3 < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x \le 2 \\ 2x < 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x < 3 \end{cases}$$

$\therefore$ $-1 \le x < 3$ 을 만족하는 정수

따라서 -1, 0, 1, 2 이므로 4개이다.

4. BC의 중점이 M인 △ABC가 있다. $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3$, $\overline{AM}=2$일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2\sqrt{13}$

해설

중선정리를 이용하면

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\left(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2\right)$ 이므로

$5^2+3^2=2(\overline{BM}^2+2^2)$

$\therefore \overline{BM}^2=13$

$\overline{BC}=2\overline{BM}=2\sqrt{13}$

5. 연립부등식 $\begin{cases} 10-2x \geq 3x \\ x-a > -3 \end{cases}$ 이 해를 갖지 않도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a > 2$　② $a \leq 2$　③ $a \geq 5$

④ $a \leq 5$　⑤ $2 < a < 5$

해설

$\begin{cases} 10-2x \geq 3x & \rightarrow \ 2 \geq x \\ x-a > -3 & \rightarrow \ x > a-3 \end{cases}$

$a-3 \geq 2$

$\therefore \ a \geq 5$

6. $\begin{cases} x^2-3x \le 0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \le \beta$ 일 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2-3x \le 0$ 에서
$x(x-3) \le 0$ 이므로
$0 \le x \le 3 \cdots$ ㈎
$x^2-5x+4<0$ 에서
$(x-1)(x-4)<0$ 이므로
$1<x<4 \cdots$ ㈏
㈎, ㈏에 의해
$1<x \le 3$ 이므로
$\alpha=1, \beta=3$
$\therefore \alpha+\beta=4$

7. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

8. 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 2mx - m \geq 0$을 만족하는 실수 m의 범위는 $a \leq m \leq b$이다. $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = -1$

해설

$x^2 - 2mx - m \geq 0$이
항상 성립하려면 판별시 $D \leq 0$
$\frac{D}{4} = m^2 + m \leq 0$
$m(m+1) \leq 0,\ -1 \leq m \leq 0$
$\therefore\ a + b = (-1) + 0 = -1$

9. 중심이 직선 $3x+y=12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ ……㉠
한편, 점 $(r,\ r)$ 는 직선 $3x+y=12$ 위에 있으므로 $3r+r=12$
$\therefore\ r=3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

10. 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+2x+2y=0$ 의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$x^2+y^2=4$, $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

다음 그림과 같이 현의 길이의 $\frac{1}{2}$ 과

작은 원의 반지름 길이가 같다.

∴ 현의 길이 : $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

11. 직선 $y = 2x + k$와 원 $x^2 - 4x + y^2 = 21$이 만나는 두 교점 사이의 거리가 최대일 때, 상수 k의 값은?

① -1　② -4　③ 4　④ 10　⑤ -10

해설

주어진 원은 $(x-2)^2 + y^2 = 25$이므로
중심의 좌표는 $(2, 0)$이다. 두 교점 사이의 거리의
최댓값은 직선 $y = 2x + k$가 원의 중심 $(2, 0)$을 지날 때이므로
$k = -4$

12. 직선 $3x-4y-12=0$ 에 수직이고 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

① $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{5}{2}x-\frac{1}{3}$

② $y=-2x-\frac{4}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{5}x-1$

③ $y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

④ $y=-\frac{6}{5}x-\frac{2}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{7}x-\frac{9}{2}$

⑤ $y=-4x-3$ 또는 $y=-9x-6$

해설

$3x-4y-12=0$ 에서

$y=\frac{3}{4}x-3\cdots\cdots$㉠

이 때, 구하는 접선이 ㉠과 수직이므로

기울기가 $-\frac{4}{3}$ 인 직선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x+b\cdots\cdots$㉡

로 놓을 수 있다.

㉡에서 $4x+3y-3b=0$ 이고,

원의 중심 $(-3,2)$ 에서 이 직선까지의 거리가

반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-12+6-3b|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1, |3b+6|=5, 3b+6=\pm5$

$3b=-1$ 또는 $3b=-11$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=-\frac{11}{3}$

이것을 ㉡에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+6x-4y+12=0$ 이므로

㉡을 이 식에 대입하여 정리하면

$25x^2+6(17-4b)x+9\left(b^2-4b+12\right)=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=\left\{3(17-4b)\right\}^2-25\cdot9\left(b^2-4b+12\right)=0$

$D=0$ 에서 $9b^2+36b+11=0$,

$(3b+1)(3b+11)=0$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=-\frac{11}{3}$ 이것을 ㉡ 에 대입하면

구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

13. 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 α라 하고, $z = \dfrac{2\alpha + 1}{\alpha + 2}$이라 할 때, $4z \cdot \bar{z}$의 값을 구하면? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 13

해설

$x^3 = 8$에서 $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$
$x^2 + 2x + 4 = 0$의 한 허근을 α라 하면
다른 허근은 $\bar{\alpha}$이므로
$\alpha + \bar{\alpha} = -2,\ \alpha\bar{\alpha} = 4$

$$\therefore\ 4z\bar{z} = 4 \times \frac{2\alpha+1}{\alpha+2} \times \frac{2\bar{\alpha}+1}{\bar{\alpha}+2}$$
$$= 4 \times \frac{4\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha+\bar{\alpha}) + 1}{\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha+\bar{\alpha}) + 4}$$
$$= 4 \times \frac{4\times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13$$

14. 두 점 A$(3,-2)$, B$(-5,1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점이 제 3 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{4}<t<\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}<t<\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{8}<t<\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{8}<t<\frac{5}{6}$

해설

A$(3,-2)$, B$(-5,1)$ 을 $t:1-t$ 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{t\cdot(-5)+(1-t)\cdot 3}{t+1-t},\frac{t\cdot 1+(1-t)\cdot(-2)}{t+1-t}\right)$$

$=(-5t+3-3t,t-2+2t)=(-8t+3,3t-2)$

이 점이 제3 사분면에 있으므로

$-8t+3<0$, $8t>3$, $t>\frac{3}{8}$

$3t-2<0$, $3t<2$, $t<\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{3}{8}<t<\frac{2}{3}$

15. 세 직선 $x-y=0$, $x+y-2=0$, $5x-ky-15=0$ 이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의 조건은?

① $-5 \le k \le 5$, $k < -10$　② $k = -10$, $k = \pm 5$

③ $-10 \le k \le -5$, $k \ge 5$　④ $k \ne -10$, $k \ne \pm 5$

⑤ $-5 \le k \le -5$, $k \ge 5$

해설

$$\begin{cases} x-y=0 & \cdots ㉠ \\ x+y-2=0 & \cdots ㉡ \\ 5x-ky-15=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

이 삼각형이 되려면 세 직선이 한 점에서 만나지 않고 어느 두 직선도 평행하지 않아야 하므로

㉠, ㉡ 의 교점은 $(1, 1)$ 이 ㉢ 위에 있지 않다.

$\therefore 5-k-15 \ne 0 \quad \therefore k \ne -10$

㉠, ㉢ 은 평행하지 않으므로

$\frac{1}{5} \ne \frac{-1}{-k} \rightarrow k \ne 5$

㉡, ㉢ 도 평행하지 않으므로

$\frac{1}{5} \ne \frac{1}{-k} \rightarrow k \ne -5$

$\therefore k \ne -10$, $k \ne \pm 5$