**1.** 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ \sqrt{3})$ 에서의 접선과 직선 $y=x$ 와의 교점의 좌표는?

① $(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

② $(2\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$

③ $(4,\ 4)$

④ $(2\sqrt{3}+2,\ 2\sqrt{3}+2)$

⑤ $(2\sqrt{3}-2,\ 2\sqrt{3}-2)$

해설

원 $x^2+y^2=4$
위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은
$-x+\sqrt{3}y=4$ 이므로 이 방정식과
$y=x$ 를 연립하면 $-x+\sqrt{3}x=4$

$\therefore\ x=\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}=2\sqrt{3}+2$

따라서 구하는 교점의 좌표는
$(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}+2)$

**2.** 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $\mathrm{A}(1, 2)$ 에서 그은 접선의 방정식은?

① $-2x + y + 5 = 0$　　② $-2x + y - 3 = 0$

③ $x - y + 5 = 0$　　④ $x + 2y + 5 = 0$

⑤ $x + 2y - 5 = 0$

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식
$x_1x + y_1y = r^2$ 을 이용하면,
$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5 \quad \therefore\ x + 2y - 5 = 0$

**3.** 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 대하여 기울기가 $m$ 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

> 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 $m$ 인
> 접선의 방정식을 $y=mx+k$ 라 하자.
> 직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식
> $x^2+y^2=r^2$ 에 대입하여 정리하면,
> $(1+m^2)x^2+2mkx+\boxed{(가)}=0$
> 이 이차방정식의 판별식을 $D$ 라 하면 원과 직선이 접하므로
> $D=0$ 에서
> $k=\pm\boxed{(나)}$
> 따라서 구하는 접선의 방정식은
> $y=mx\pm\boxed{(나)}$

(가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2+1}$ ② $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2-1}$
③ $k^2-r^2,\ \sqrt{m^2+1}$ ④ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
⑤ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2-1}$

해설

직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$ 에
대입하면, $x^2+(mx+k)^2=r^2$
$(1+m^2)x^2+2mkx+k^2-r^2=0$
이 이차방정식의 판별식을 $D$ 라 하면,
$\frac{D}{4}=m^2k^2-(1+m^2)(k^2-r^2)=m^2r^2+r^2-k^2$
원과 직선이 접하므로 $D=0$ ,
즉$r^2(m^2+1)=k^2$, $k=\pm r\sqrt{m^2+1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
$\therefore$ (가) : $k^2-r^2$, (나) : $r\sqrt{m^2+1}$

**4.** 원 $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하면?

① $y = 2x \pm \sqrt{10}$　② $y = 2x \pm 3\sqrt{2}$　③ $y = 2x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 2x \pm 2\sqrt{6}$　⑤ $y = 2x \pm \sqrt{30}$

**해설**

기울기가 2 인 직선의 방정식은
$y = 2x + k$ 직선이 원에 접하므로 직선과 원의
중심 사이 거리는 반지름과 같다.

$$\therefore \quad \frac{|2 \times 0 + (-1) \times 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$$

$\Rightarrow \quad |k| = \sqrt{30}$

$\Rightarrow \quad k = \pm\sqrt{30}$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y = 2x \pm \sqrt{30}$

**5.** 점 $(3,\ 1)$ 에서 $x^2+y^2=2$ 에 그은 두 접선의 방정식을 구하면 $x-y=2,\ ax+by=10$ 이다. 이 때, $ab$ 의 값을 구하면?

① 1　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 12

해설

점 $(3,\ 1)$ 을 지나므로 $3a+b=10\ \cdots$ ㉠

원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같으므로

$\dfrac{|-10|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2},\ \ a^2+b^2=50\ \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면,

$a^2+(10-3a)^2=50$

$10a^2-60a+50=0$

$a^2-6a+5=0$

$\therefore\ a=1,\ 5$

$\therefore\ a=5,\ b=-5$ 또는 $a=1,\ b=7$

한 접선의 방정식이 $x-y=2$ 이므로,

$a=1,\ b=7$

$\therefore\ ab=7$

**6.** 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 $y$절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 $m$이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots①$
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$ 과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.
$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$ , $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5$, $4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2},-2$
여기서 기울기가 음수인 $-2$를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 $y$절편은 5이다.

**7.** 점 A$(0,\ a)$에서 원 $x^2+(y-3)^2=8$에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 $a$의 값은 ?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

점 A$(0,\ a)$을 지나고 기울기가 $m$인 접선을
$y=mx+a$로 놓으면 원의 중심 $(0,\ 3)$에서
접선 $mx-y+a=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$(a-3)^2=8(m^2+1)$

$8m^2-a^2+6a-1=0$

$m$에 관한 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면,
두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta=-1$ 이어야 하므로

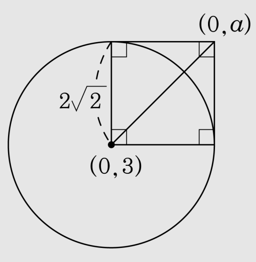
$$\frac{-a^2+6a-1}{8}=-1$$

$a^2-6a-7=0,\quad (a-7)(a+1)=0$

$\therefore\ a=7\ (\because a>0)$

해설

원의 중심 $(0,\ 3)$에서 A$(0,\ a)$까지의 거리는
반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0+(a-3)^2}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$




$a-3=\pm4$

$\therefore\ a=7$ 또는 $a=-1$

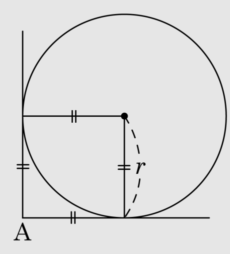
그런데 $a>0$ 에서 $a=7$

**8.** 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$과 원 밖의 점 A$(2,\ 1)$이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 $r$의 값은?

① 3 ② $\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 $r$ 인 정사각형이 된다.
따라서 원 중심에서 A 까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.




$\therefore\ \sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{2}r$
$\therefore\ r=3$

**9.** 점 $(-3,\ 1)$ 에서 원 $x^2+y^2=5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 양인 직선의 방정식을 구하면?

① $2x+y-5=0$ ② $2x-y-5=0$ ③ $x-2y+5=0$

④ $x-2y-5=0$ ⑤ $x+2y-5=0$

해설

접선의 기울기를 $m$이라고 하면 $(-3,1)$을 지나므로

$y=m(x+3)+1,\quad mx-y+3m+1=0$

접선이므로 원의 중심과 직선사이의 거리가 반지름과 같다.

$\dfrac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$

$2m^2+3m-2=0$

$m=\dfrac{1}{2},\ -2$

$m>0$이므로 $m=\dfrac{1}{2}$

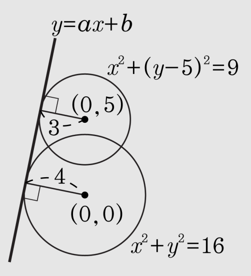
$\therefore$ 직선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

**10.** 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$$x^2+y^2=16,\ \ x^2+(y-5)^2=9$$

① $y=\pm\sqrt{6}x+10$
② $y=\pm 2\sqrt{6}x+20$
③ $y=\pm 3\sqrt{6}x+30$
④ $y=\pm 4\sqrt{6}x+40$
⑤ $y=\pm 5\sqrt{6}x+50$

해설




$x^2+y^2=16 \cdots\cdots$ ㉠,
$x^2+(y-5)^2=9 \cdots\cdots$ ㉡
공통접선의 방정식을
$y=ax+b \cdots\cdots$ ㉢ 로 놓는다.
이때, 원 ㉠과 직선 ㉢이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=4$$

$\therefore |b|=4\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉣
또, 원 ㉡과 직선 ㉢도 접하므로

$$\frac{|-5+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=3$$

$\therefore |b-5|=3\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉤
그런데 $b\neq 0$ 이므로 ㉤ $\div$ ㉣을 하면

$$\frac{|b-5|}{b}=\frac{3}{4}$$

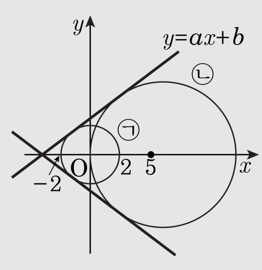
$4|b-5|=3|b|,\ 4(b-5)=\pm 3b$
$\therefore b=20$ 또는 $b=\frac{20}{7}$
(i) $b=20$ 일 때, ㉣에서 $\sqrt{a^2+1}=5$
$\therefore a=\pm 2\sqrt{6}$
(ii) $b=\frac{20}{7}$ 일 때, ㉣에서
$\sqrt{a^2+1}=\frac{5}{7}$ 이고,
이것을 만족하는 실수 $a$ 는 없다.
(i), (ii) 로부터 $a=\pm 2\sqrt{6}, b=20$ 이므로
구하는 공통접선의 방정식은
$y=\pm 2\sqrt{6}x+20$

**11.** 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2+y^2=4$ , $(x-5)^2+y^2=25$

① $y=\pm\frac{3}{4}x\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)
② $y=\pm\frac{4}{5}x\pm 2$ (복부호 동순)
③ $y=\pm\frac{5}{6}x\pm\frac{7}{5}$ (복부호 동순)
④ $y=\pm\frac{9}{10}x\pm\frac{11}{8}$ (복부호 동순)
⑤ $y=\pm\frac{10}{11}x\pm\frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설




$x^2+y^2=4$ ······㉠
$(x-5)^2+y^2=25$ ······㉡
공통접선의 방정식을 $y=ax+b$ ······㉢로 놓으면
원 ㉠과 직선㉢, 즉 $ax-y+b=0$ 이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=2$$

$\therefore |b|=2\sqrt{a^2+1}$ ······㉣
또, 원 ㉡도 직선 ㉢, 즉 $ax-y+b=0$ 과 접하므로

$$\frac{|5a+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=5$$

$\therefore |5a+b|=5\sqrt{a^2+1}$ ······㉤
그런데 $b\neq 0$ 이므로 ㉤÷㉣을 하면

$$\frac{|5a+b|}{|b|}=\frac{5}{2}$$

$2|5a+b|=5|b|, 2(5a+b)=\pm 5b$

$\therefore b=-\frac{10}{7}a$ 또는 $b=\frac{10}{3}a$

(i) $b=-\frac{10}{7}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{7}|a|=2\sqrt{a^2+1}, 5|a|=7\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면
$24a^2+49=0$
이것을 만족하는 실수 $a$ 는 없다.

(ii) $b=\frac{10}{3}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{3}|a|=2\sqrt{a^2+1}, 5|a|=3\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2=9, a^2=\frac{9}{16}$

$\therefore a=\pm\frac{3}{4}, b=\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$y=\pm\frac{3}{4}x\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

**12.** $(k,\ 0)$에서 $x^2+y^2-2y=0$에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 $45^\circ$일 때, 양수 $k$의 값을 구하면?

① $k=-\sqrt{2}+1$　　② $k=\sqrt{2}+1$　　③ $k=\sqrt{2}-1$

④ $k=2\sqrt{2}+1$　　⑤ $k=\sqrt{2}+2$

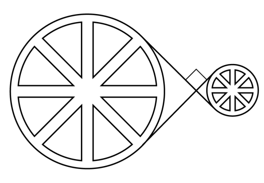
해설

$x^2+y^2-2y=0$에서 $x^2+(y-1)^2=1$이므로
두 접선 중 하나는 $x$축이고,
두 접선이 이루는 각의 크기가 $45^\circ$이므로
다른 하나의 접선의 기울기는 $-1$이다. $(\because\ k>0)$
따라서 접선의 방정식을 $y=-x+b$로 놓으면 $x+y-b=0$
이 때, 원의 중심 $(0,1)$에서 이 직선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로

$$\frac{|0+1-b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$$

$\therefore |1-b|=\sqrt{2}$
$b>1$이므로 $b-1=\sqrt{2}$
$\therefore b=\sqrt{2}+1$
따라서 접선의 방정식은 $y=-x+\sqrt{2}+1$이고
점 $(k,0)$을 지나므로
$0=-k+\sqrt{2}+1$　　$\therefore k=\sqrt{2}+1$

**13.** 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6, 2 인 두 원판을 ∞ 모양으로 벨트를 채웠는데 가운데 부분이 수직으로 만난다고 한다. 이 벨트의 길이를 $a+b\pi$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

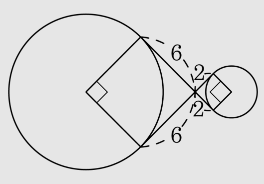


▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

두 원의 내접선의 길이는 다음 그림에서 $6+2=8$ 이다.




$\therefore$ 벨트의 길이는

$2\times8+\pi\times2\times6\times\dfrac{270}{360}+\pi\times2\times2\times\dfrac{270}{360}$

$=16+12\pi$

$\therefore\ a+b=28$