

1. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $P(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선과 직선 $y = x$ 와의 교점의 좌표는?

① $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$

② $(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

③ $(4, 4)$

④ $(2\sqrt{3} + 2, 2\sqrt{3} + 2)$

⑤ $(2\sqrt{3} - 2, 2\sqrt{3} - 2)$

해설

원 $x^2 + y^2 = 4$

위의 점 $P(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$-x + \sqrt{3}y = 4$ 이므로 이 방정식과

$y = x$ 를 연립하면 $-x + \sqrt{3}x = 4$

$$\therefore x = \frac{4}{\sqrt{3} - 1} = 2\sqrt{3} + 2$$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$$(2\sqrt{3} + 2, 2\sqrt{3} + 2)$$

2. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $A(1, 2)$ 에서 그은 접선의 방정식은?

① $-2x + y + 5 = 0$

② $-2x + y - 3 = 0$

③ $x - y + 5 = 0$

④ $x + 2y + 5 = 0$

⑤ $x + 2y - 5 = 0$

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식

$x_1x + y_1y = r^2$ 을 이용하면,

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5 \quad \therefore x + 2y - 5 = 0$$

3. 다음은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인

접선의 방정식을 $y = mx + k$ 라 하자.

직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식

$x^2 + y^2 = r^2$ 에 대입하여 정리하면,

$$(1 + m^2)x^2 + 2mkx + \boxed{\text{(가)}} = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로

$D = 0$ 에서

$$k = \pm \boxed{\text{(나)}}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \boxed{\text{(나)}}$$

(가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 + 1}$

② $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 - 1}$

③ $k^2 - r^2, \sqrt{m^2 + 1}$

④ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 + 1}$

⑤ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 - 1}$

해설

직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$ 에

대입하면, $x^2 + (mx + k)^2 = r^2$

$$(1 + m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,

$$\frac{D}{4} = m^2k^2 - (1 + m^2)(k^2 - r^2) = m^2r^2 + r^2 - k^2$$

원과 직선이 접하므로 $D = 0$,

$$\text{즉 } r^2(m^2 + 1) = k^2, k = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\therefore \text{(가)} : k^2 - r^2, \text{(나)} : r\sqrt{m^2 + 1}$$

4. 원 $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하면?

① $y = 2x \pm \sqrt{10}$

② $y = 2x \pm 3\sqrt{2}$

③ $y = 2x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 2x \pm 2\sqrt{6}$

⑤ $y = 2x \pm \sqrt{30}$

해설

기울기가 2 인 직선의 방정식은

$y = 2x + k$ 직선이 원에 접하므로 직선과 원의
중심 사이 거리는 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|2 \times 0 + (-1) \times 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow |k| = \sqrt{30}$$

$$\Rightarrow k = \pm \sqrt{30}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = 2x \pm \sqrt{30}$$

5. 점 (3, 1) 에서 $x^2 + y^2 = 2$ 에 그은 두 접선의 방정식을 구하면 $x - y = 2$, $ax + by = 10$ 이다. 이 때, ab 의 값을 구하면?

① 1

② 5

③ 7

④ 9

⑤ 12

해설

점 (3, 1) 을 지나므로 $3a + b = 10 \dots \textcircled{7}$

원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같으므로

$$\frac{|-10|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}, \quad a^2 + b^2 = 50 \dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하여 정리하면,

$$a^2 + (10 - 3a)^2 = 50$$

$$10a^2 - 60a + 50 = 0$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0$$

$$\therefore a = 1, 5$$

$$\therefore a = 5, b = -5 \text{ 또는 } a = 1, b = 7$$

한 접선의 방정식이 $x - y = 2$ 이므로,

$$a = 1, b = 7$$

$$\therefore ab = 7$$

6. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

접선은 $y + 1 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, | -3m - 1 | = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$$

따라서, 기울기 $m = \frac{1}{2}, -2$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = -2x + 5$$

따라서 y 절편은 5이다.

7. 점 A(0, a)에서 원 $x^2 + (y - 3)^2 = 8$ 에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은 ?

① 3

② 5

③ 7

④ 9

⑤ 10

해설

점 A(0, a)을 지나고 기울기가 m인 접선을 $y = mx + a$ 로 놓으면 원의 중심 (0, 3)에서 접선 $mx - y + a = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$$(a - 3)^2 = 8(m^2 + 1)$$

$$8m^2 - a^2 + 6a - 1 = 0$$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2 + 6a - 1}{8} = -1$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0, (a - 7)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = 7 (\because a > 0)$$

해설

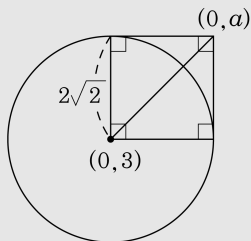
원의 중심 (0, 3)에서 A(0, a)까지의 거리는

반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0 + (a - 3)^2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$$a - 3 = \pm 4$$

$$\therefore a = 7 \text{ 또는 } a = -1$$

그런데 $a > 0$ 에서 $a = 7$



8. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2 + (y-4)^2 = r^2$ 과 원 밖의 점 A(2, 1) 이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

① 3

② $\sqrt{10}$

③ $\sqrt{11}$

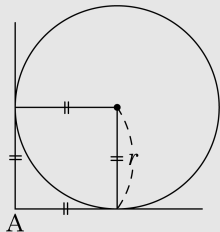
④ $\sqrt{13}$

⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림 처럼 한 변이 r 인 정사각형이 된다.

따라서 원 중심에서 A 까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.



$$\therefore \sqrt{(5-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2}r$$

$$\therefore r = 3$$

9. 점 $(-3, 1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 양인 직선의 방정식을 구하면?

- ① $2x + y - 5 = 0$ ② $2x - y - 5 = 0$ ③ $x - 2y + 5 = 0$
④ $x - 2y - 5 = 0$ ⑤ $x + 2y - 5 = 0$

해설

접선의 기울기를 m 이라고 하면 $(-3, 1)$ 을 지나므로

$$y = m(x + 3) + 1, \quad mx - y + 3m + 1 = 0$$

접선이므로 원의 중심과 직선사이의 거리가 반지름과 같다.

$$\frac{|3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$m = \frac{1}{2}, -2$$

$$m > 0 \text{ 이므로 } m = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ 직선의 방정식은 } y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

10. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$$x^2 + y^2 = 16, \quad x^2 + (y - 5)^2 = 9$$

① $y = \pm \sqrt{6}x + 10$

② $y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

③ $y = \pm 3\sqrt{6}x + 30$

④ $y = \pm 4\sqrt{6}x + 40$

⑤ $y = \pm 5\sqrt{6}x + 50$

해설

$$x^2 + y^2 = 16 \dots\dots \textcircled{㉠},$$

$$x^2 + (y - 5)^2 = 9 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

공통접선의 방정식을

$$y = ax + b \dots\dots \textcircled{㉢} \text{로 놓는다.}$$

이때, 원 ㉠과 직선 ㉢이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

$$\therefore |b| = 4\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{㉣}$$

또, 원 ㉡과 직선 ㉢도 접하므로

$$\frac{|-5 + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 3$$

$$\therefore |b - 5| = 3\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{㉤}$$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 ㉣ $\div$ ㉤을 하면

$$\frac{|b - 5|}{b} = \frac{3}{4}$$

$$4|b - 5| = 3|b|, \quad 4(b - 5) = \pm 3b$$

$$\therefore b = 20 \text{ 또는 } b = \frac{20}{7}$$

(i) $b = 20$ 일 때, ㉣에서 $\sqrt{a^2 + 1} = 5$

$$\therefore a = \pm 2\sqrt{6}$$

(ii) $b = \frac{20}{7}$ 일 때, ㉤에서

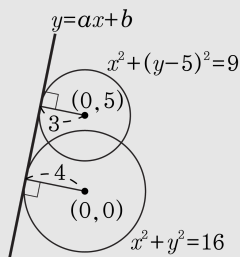
$$\sqrt{a^2 + 1} = \frac{5}{7} \text{ 이고,}$$

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(i), (ii)로부터 $a = \pm 2\sqrt{6}, b = 20$ 이므로

구하는 공통접선의 방정식은

$$y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$$



11. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$$x^2 + y^2 = 4, (x-5)^2 + y^2 = 25$$

① $y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)

② $y = \pm \frac{4}{5}x \pm 2$ (복부호 동순)

③ $y = \pm \frac{5}{6}x \pm \frac{7}{5}$ (복부호 동순)

④ $y = \pm \frac{9}{10}x \pm \frac{11}{8}$ (복부호 동순)

⑤ $y = \pm \frac{10}{11}x \pm \frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설

$$x^2 + y^2 = 4 \dots\dots \textcircled{A}$$

$$(x-5)^2 + y^2 = 25 \dots\dots \textcircled{B}$$

공통접선의 방정식을 $y = ax + b$
 $\dots\dots \textcircled{C}$ 로 놓으면

원 $\textcircled{A}$ 과 직선 $\textcircled{C}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 이
 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$\therefore |b| = 2\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{D}$$

또, 원 $\textcircled{B}$ 도 직선 $\textcircled{C}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 과 접하므로

$$\frac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$$

$$\therefore |5a + b| = 5\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{E}$$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{D} \div \textcircled{E}$ 을 하면

$$\frac{|5a + b|}{|b|} = \frac{5}{2}$$

$$2|5a + b| = 5|b|, 2(5a + b) = \pm 5b$$

$$\therefore b = -\frac{10}{7}a \text{ 또는 } b = \frac{10}{3}a$$

(i) $b = -\frac{10}{7}a$ 일 때, $\textcircled{D}$ 에서

$$\frac{10}{7}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 7\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$24a^2 + 49 = 0$$

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b = \frac{10}{3}a$ 일 때, $\textcircled{D}$ 에서

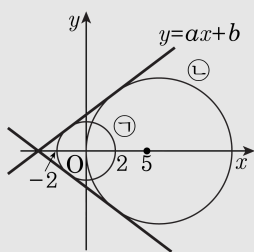
$$\frac{10}{3}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2 = 9, a^2 = \frac{9}{16}$

$$\therefore a = \pm \frac{3}{4}, b = \pm \frac{5}{2} \text{ (복부호 동순)}$$

(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$$y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2} \text{ (복부호 동순)}$$



12. $(k, 0)$ 에서 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 45° 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

① $k = -\sqrt{2} + 1$

② $k = \sqrt{2} + 1$

③ $k = \sqrt{2} - 1$

④ $k = 2\sqrt{2} + 1$

⑤ $k = \sqrt{2} + 2$

해설

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에서 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 이므로

두 접선 중 하나는 x 축이고,

두 접선이 이루는 각의 크기가 45° 이므로

다른 하나의 접선의 기울기는 -1 이다. ($\because k > 0$)

따라서 접선의 방정식을 $y = -x + b$ 로 놓으면 $x + y - b = 0$

이 때, 원의 중심 $(0, 1)$ 에서 이 직선까지의 거리가

원의 반지름과 같으므로

$$\frac{|0 + 1 - b|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1$$

$$\therefore |1 - b| = \sqrt{2}$$

$$b > 1 \text{ 이므로 } b - 1 = \sqrt{2}$$

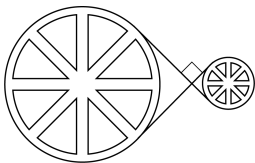
$$\therefore b = \sqrt{2} + 1$$

따라서 접선의 방정식은 $y = -x + \sqrt{2} + 1$ 이고

점 $(k, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -k + \sqrt{2} + 1 \quad \therefore k = \sqrt{2} + 1$$

13. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6, 2 인 두 원판을 ∞ 모양으로 벨트를 채웠는데 가운데 부분이 수직으로 만난다고 한다. 이 벨트의 길이를 $a + b\pi$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값을 구 하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

두 원의 내접선의 길이는 다음 그림에서 $6 + 2 = 8$ 이다.

$\therefore$ 벨트의 길이는

$$2 \times 8 + \pi \times 2 \times 6 \times \frac{270}{360} + \pi \times 2 \times 2 \times \frac{270}{360}$$

$$= 16 + 12\pi$$

$$\therefore a + b = 28$$

