

1. 중심이 $(2, -1)$ 이고 원점을 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ ② $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 7$

③ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 8$ ④ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

⑤ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$

해설

구하는 원의 방정식을

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{1} \text{으로 놓으면}$$

이 원이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$(0-2)^2 + (0+1)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 5$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

2. $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 = 0$ 과 중심이 같고, 원점을 지나는 원의 반지름의 길이를 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 &= 0 \\ \Rightarrow (x+4)^2 + (y-3)^2 &= 26 \\ \text{중심 : } (-4, 3) \\ \therefore (x+4)^2 + (y-3)^2 &= r^2, \\ (0, 0) \text{을 지나므로} \\ r &= 5 (\because r > 0)\end{aligned}$$

3. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 (1, 2) 에서의 접선의 방정식은?

① $x + y = 3$

② $2x - y = 0$

③ $x - 2y = -3$

④ $2x + y = 4$

⑤ $x + 2y = 5$

해설

원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 (1, 2) 에서의 접선의 방정식은

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5$$

$$\therefore x + 2y = 5$$

4. 점 $(-2, 3)$ 이 어떤 평행이동에 의하여 점 $(3, -1)$ 로 옮겨질 때, 점 $(1, -3)$ 은 같은 평행이동에 의하여 어떤 점으로 옮겨지는가?

- ① $(4, -5)$ ② $(5, 6)$ ③ $(6, -7)$
④ $(5, -7)$ ⑤ $(6, 8)$

해설

점 $(-2, 3)$ 이 어떤 평행이동에 의하여 점 $(3, -1)$ 로 옮겨졌으므로 이 평행이동은 x 축으로 5 만큼, y 축으로 -4 만큼 이동하는 것이다. 따라서 점 $(1, -3)$ 은 $(6, -7)$ 로 옮겨진다.

5. 직선 $2x - y + 1 = 0$ 을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행 이동한 식이 $2x - y - 4 = 0$ 이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}2(x - 3) - (y - a) + 1 &= 0 \\2x - y - 5 + a &= 0 \\ \therefore a &= 1\end{aligned}$$

6. 이차방정식 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 6a^2 - a - 6 = 0$ 이 원의 방정식이 될 때 다음 중 a 가 가질 수 없는 정수 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$(x+a)^2 + (y-2a)^2 = -(a^2 - a - 6)$$

이것이 원을 나타내려면 $-(a^2 - a - 6) > 0$
즉 $a^2 - a - 6 < 0$
 $\therefore -2 < a < 3$

7. 두 원 $x^2 + y^2 = a^2$, $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$ 가 만나지 않을 조건은?
(단, $a > 0$)

① $0 < a < 3$

② $3 < a < 7$

③ $a > 7$

④ $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$

⑤ $2 < a < 7$ 또는 $a > 7$

해설

두 원의 중심이 각각 $(0, 0)$, $(3, -4)$ 이므로

두 원의 중심거리 d 는 $d = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

(i) 두 원이 서로 외부에 위치할 때

$$d = 5 > a + 2$$

$$\therefore 0 < a < 3$$

(ii) 한 원이 다른 원의 내부에 위치할 때

$$d = 5 < |a - 2|$$

$$\therefore a > 7 (\because a > 0)$$

(i), (ii) 에서 $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$

8. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) &= 0 \\ -4x + 4y + 6 &= 0 \\ \therefore 2x - 2y - 3 &= 0\end{aligned}$$

9. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과 직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

10. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-2 < k < 2$ ② $0 < k < 4$ ③ $-4 < k < 0$
④ $-2 < k < 0$ ⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 를 구하면

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로
원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$ 이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore -4 < k < 4$$

11. 직선 $x + 3y - k = 0$ 이 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 3$ 의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

따라서 원의 중심 (5, 0)이 직선 위에 있으므로 $5 - k = 0$

$\therefore k = 5$

12. 점 (1, 2)를 지나고 x축 및 y축에 동시에 접하는 원은 두 개가 존재할 때, 이 두 원의 중심 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이 원이 점 (1, 2)를 지나므로 $(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2$, $r^2 - 6r + 5 = 0$, $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 $r = 5$
따라서, 두 원의 중심은 각각 (1, 1), (5, 5)이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$

13. 점 $P(a,0)$ 에서 원 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ 에 그은 접선의 길이가 4일 때, 점 P 의 좌표를 모두 구하면?

- ① $(1,0), (7,0)$ ② $(-1,0), (7,0)$ ③ $(1,0), (-7,0)$
④ $(-1,0), (5,0)$ ⑤ $(1,0), (-5,0)$

해설

원의 중심을 $C(3,2)$, 접점을 Q 라 하면

$$CP = \sqrt{(a-3)^2 + 2^2}$$

CPQ 는 직각삼각형이므로

$$(a-3)^2 + 4 = 2^2 + 4^2$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0$$

$$(a+1)(a-7) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 7$$

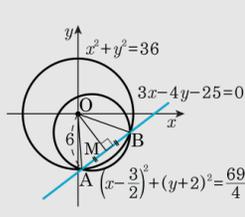
따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $(-1,0), (7,0)$ 이다.

14. 두 원 $x^2+y^2-36=0$, $x^2+y^2-3x+4y-11=0$ 의 공통현의 길이는?

- ① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $3\sqrt{11}$ ④ $4\sqrt{11}$ ⑤ $5\sqrt{11}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 36 - (x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11) = 0$
 $\therefore 3x - 4y - 25 = 0 \dots \textcircled{1}$
 $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11 = 0$ 에서
 $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{69}{4}$



이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.
 다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B
 \overline{AB} 의 중점을 M이라 하면
 원 $x^2 + y^2 = 36$ 의 중심 $(0,0)$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리 \overline{OM} 은

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$$

원 $x^2 + y^2 = 36$ 의 반지름의 길이는 6이므로
 피타고라스의 정리에 의하여
 $\overline{AM} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$
 따라서, 공통현의 길이 \overline{AB} 는
 $\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{11}$

15. 점 A(2, 2)에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기를 α, β 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값은 ?

- ① $\frac{8}{3}$ ② $-\frac{8}{3}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

점 (2, 2)를 지나고 기울기 m 인 접선을
 $y - 2 = m(x - 2)$ 즉, $mx - y - 2m + 2 = 0$
이라고 하면

원의 중심 (0, 0)에서 접선까지 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.

$$\text{따라서 } 1 = \frac{|-2m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

$$|-2m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2 - 8m + 3 = 0$

따라서 두 기울기의 곱은 근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.