

1. 중심이 $(2, -1)$ 이고 원점을 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

② $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 7$

③ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 8$

④ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

⑤ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$

해설

구하는 원의 방정식을

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{7} \text{으로 놓으면}$$

이 원이 원점 $(0,0)$ 을 지나므로

$$(0-2)^2 + (0+1)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 5$$

이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

2. $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 = 0$ 과 중심이 같고, 원점을 지나는 원의 반지름의 길이를 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 26$$

중심 : $(-4, 3)$

$$\therefore (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = r^2,$$

$(0, 0)$ 을 지나므로

$$r = 5 (\because r > 0)$$

3. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은?

① $x + y = 3$

② $2x - y = 0$

③ $x - 2y = -3$

④ $2x + y = 4$

⑤ $x + 2y = 5$

해설

원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5$$

$$\therefore x + 2y = 5$$

4. 점 $(-2, 3)$ 이 어떤 평행이동에 의하여 점 $(3, -1)$ 로 옮겨질 때, 점 $(1, -3)$ 은 같은 평행이동에 의하여 어떤 점으로 옮겨지는가?

① $(4, -5)$

② $(5, 6)$

③ $(6, -7)$

④ $(5, -7)$

⑤ $(6, 8)$

해설

점 $(-2, 3)$ 이 어떤 평행이동에 의하여
점 $(3, -1)$ 로 옮겨졌으므로 이 평행이동은
 x 축으로 5 만큼, y 축으로 -4 만큼 이동하는 것이다.
따라서 점 $(1, -3)$ 은 $(6, -7)$ 로 옮겨진다.

5. 직선 $2x - y + 1 = 0$ 을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행 이동한 식이 $2x - y - 4 = 0$ 이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$2(x - 3) - (y - a) + 1 = 0$$

$$2x - y - 5 + a = 0$$

$$\therefore a = 1$$

6. 이차방정식 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 6a^2 - a - 6 = 0$ 이 원의 방정식이 될 때 다음 중 a 가 가질 수 없는 정수 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(x + a)^2 + (y - 2a)^2 = -(a^2 - a - 6)$$

이것이 원을 나타내려면 $-(a^2 - a - 6) > 0$

$$\text{즉 } a^2 - a - 6 < 0$$

$$\therefore -2 < a < 3$$

7. 두 원 $x^2 + y^2 = a^2$, $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$ 가 만나지 않을 조건은?
(단, $a > 0$)

① $0 < a < 3$

② $3 < a < 7$

③ $a > 7$

④ $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$

⑤ $2 < a < 7$ 또는 $a > 7$

해설

두 원의 중심이 각각 $(0, 0)$, $(3, -4)$ 이므로

두 원의 중심거리 d 는 $d = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

(i) 두 원이 서로 외부에 위치할 때

$$d = 5 > a + 2$$

$$\therefore 0 < a < 3$$

(ii) 한 원이 다른 원의 내부에 위치할 때

$$d = 5 < |a - 2|$$

$$\therefore a > 7 (\because a > 0)$$

(i), (ii) 에서 $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$

8. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) &= 0 \\ -4x + 4y + 6 &= 0 \\ \therefore 2x - 2y - 3 &= 0\end{aligned}$$

9. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0, 0)$ 과
직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

10. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < 2$

② $0 < k < 4$

③ $-4 < k < 0$

④ $-2 < k < 0$

⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 를 구하면

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$ 이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore -4 < k < 4$$

11. 직선 $x + 3y - k = 0$ 이 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 3$ 의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

따라서 원의 중심 $(5, 0)$ 이 직선 위에 있으므로 $5 - k = 0$

$\therefore k = 5$

12. 점 (1, 2)를 지나고 x 축 및 y 축에 동시에 접하는 원은 두 개가 존재할 때, 이 두 원의 중심 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$(x-r)^2 \times (y-r)^2 = r^2$ 이 원이 점 (1, 2)를 지나므로

$$(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2, \quad r^2 - 6r + 5 = 0, \quad (r-1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } r = 5$$

따라서, 두 원의 중심은 각각 (1, 1), (5, 5) 이므로

두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$$

13. 점 $P(a, 0)$ 에서 원 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ 에 그은 접선의 길이가 4일 때, 점 P 의 좌표를 모두 구하면?

① $(1, 0), (7, 0)$

② $(-1, 0), (7, 0)$

③ $(1, 0), (-7, 0)$

④ $(-1, 0), (5, 0)$

⑤ $(1, 0), (-5, 0)$

해설

원의 중심을 $C(3, 2)$, 접점을 Q 라 하면

$$\overline{CP} = \sqrt{(a-3)^2 + 2^2}$$

CPQ 는 직각삼각형이므로

$$(a-3)^2 + 4 = 2^2 + 4^2$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0$$

$$(a+1)(a-7) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 7$$

따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $(-1, 0), (7, 0)$ 이다.

14. 두 원 $x^2 + y^2 - 36 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11 = 0$ 의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{11}$

② $2\sqrt{11}$

③ $3\sqrt{11}$

④ $4\sqrt{11}$

⑤ $5\sqrt{11}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 36 -$$

$$(x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11) = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - 25 = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11 = 0$ 에서

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{69}{4}$$

이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B

$\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면

원 $x^2 + y^2 = 36$ 의 중심 (0,0)과 직선 $\textcircled{7}$ 사이의 거리 $\overline{OM}$ 은

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$$

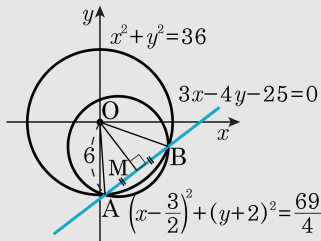
원 $x^2 + y^2 = 36$ 의 반지름의 길이는 6이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AM} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$ 는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{11}$$



15. 점 A(2, 2)에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기를 α, β 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값은 ?

① $\frac{8}{3}$

② $-\frac{8}{3}$

③ 1

④ -1

⑤ 0

해설

점 (2, 2)를 지나고 기울기 m 인 접선을

$$y - 2 = m(x - 2) \text{ 즉, } mx - y - 2m + 2 = 0$$

이라고 하면

원의 중심 (0, 0)에서 접선까지 거리는

원의 반지름 1과 같아야 한다.

$$\text{따라서 } 1 = \frac{|-2m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

$$|-2m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2 - 8m + 3 = 0$

따라서 두 기울기의 곱은 근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.