

1. 두 원 $(x-2)^2 + y^2 = 10$, $x^2 + y^2 + y - 5 = 0$ 의 공통현을 포함하는 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$(x-2)^2 + y^2 = 10$ 에서

$x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ 이므로

두 원의 공통현을 포함하는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x - 6 - (x^2 + y^2 + y - 5) = 0$$

$$4x + y + 1 = 0, y = -4x - 1$$

$$\therefore a = -4, b = -1$$

$$\therefore a + b = -4 + (-1) = -5$$

2. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.

그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a < 0, b < 0$)

$$(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1)m + (x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3) = 0$$

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$$

연립하여 풀면 $(x, y) = (-3, -2), (1, -2)$

그러므로 $(a, b) = (-3, -2)$

3. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) &= 0 \\ -4x + 4y + 6 &= 0 \\ \therefore 2x - 2y - 3 &= 0\end{aligned}$$

4. 두 원 O와 O'의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

① $\frac{60}{13}$

② $\frac{90}{13}$

③ $\frac{120}{13}$

④ $\frac{150}{13}$

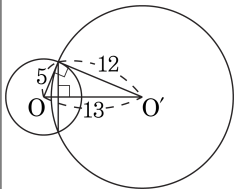
⑤ $\frac{180}{13}$

해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면
 $\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = \frac{120}{13}$$



5. 두 원 $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ 의 교점과 점 $(1, 0)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 1 = 0$

② $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$

④ $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 2 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 5x + 4y + 3 = 0$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x + k(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8) = 0$$

($k \neq -1$ 인 실수)

이 원이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$1 - 4 + k(1 - 6 + 8) = 0$$

$$-3 + 3k = 0 \quad \therefore k = 1$$

따라서, 주어진 두 원의 교점을 지나는

원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x + x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$$

6. 두 원 $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ 의 교점과 점 $(1, 0)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하면?

① -3

② $-\frac{5}{2}$

③ $\frac{3}{2}$

④ 3

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8) + k(x^2 + y^2 - 4x) = 0$$

위 식이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$x = 1, y = 0 \text{ 을 대입하면 } 3 - 3k = 0, k = 1$$

$k = 1$ 을 위식에 대입하여

$$\text{정리하면 } x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$$

중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$a = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{2}$$

따라서 $a + b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$ 이다.

7. 두 점에서 만나는 두 원

$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

과 x, y 에 대한 방정식

$$(x^2 + y^2 - 2y - 3) + k(x^2 + y^2 - 4x + 1) = 0 (\text{단, } k \text{는 실수}) \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

에 대하여 방정식 ㉢의 그래프는 실수 k 의 값에 관계없이 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지남을 보이는 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

두 원 ㉠, ㉡의 교점을 (α, β) 라고 하면

(가), (나) ($\leftarrow$ 두 원은 모두 점 (α, β) 를 지나므로) 이므로 임의의 실수 k 에 대하여

(다) ($\leftarrow (\alpha, \beta)$ 를 ㉢에 대입한 것과 같은 식)이 성립한다.

따라서, (라)의 그래프는 k 의 값에 관계없이 (마),

즉, 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지난다.

① (가) : $\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta - 3 = 0$

② (나) : $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 1 = 0$

③ (다) : $(\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta - 3) + (\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 1) = 0$

④ (라) : ㉢

⑤ (마) : 점 (α, β)

해설

(α, β) 를 ㉢에 대입한 식은 $(\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta - 3) + k(\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 1) = 0$

8. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x + ky - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 의 공통현의 방정식이 직선 $y = x - 1$ 과 수직일 때, k 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x + ky - 4 - (x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4) = 0$$

$$2x + (k + 2)y - 8 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 과 직선 $y = x - 1$,

즉 $x - y - 1 = 0$ 이 수직이므로

$$2 \cdot 1 + (k + 2)(-1) = 0 \quad \therefore k = 0$$

9. 원 O 와 O' 의 반지름의 길이가 각각 3cm, 4cm 이고, 중심거리가 5cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

① 3.2

② 3.6

③ 4.2

④ 4.8

⑤ 5.2

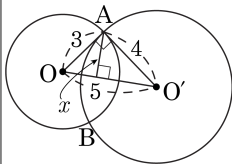
해설

$\triangle AOO'$ 에서 넓이는 6이다.

$$6 = \frac{1}{2} \times 5 \times x$$

$$\therefore x = \frac{12}{5}$$

따라서 공통현의 길이는 $2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5} = 4.8$



10. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x + 6y = 7$ 의 공통현의 길이를 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\sqrt{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $\sqrt{3}$

해설

두 원의 교점을 P, Q 라 하고 $\overline{PQ}$ 의 중점을 H 라 하면

$\triangle OPH$ 는 직각삼각형이고,

$\overline{OP}$ 의 길이는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 반지름이므로 1 이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 1) - (x^2 + y^2 - 6x + 6y - 7) = 0,$$

$$\text{즉 } x - y + 1 = 0 \quad \dots\dots\text{㉠}$$

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 O(0, 0) 에서

직선 ㉠에 이르는 거리

$$\overline{OH} = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{PH} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = \sqrt{2}$$

11. 두 원 $x^2 + y^2 - 2 = 0$, $x^2 + y^2 + kx - 4y - 1 = 0$ 의 교점을 지나는 직선이 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행일 때, k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2 - (x^2 + y^2 + kx - 4y - 1) = 0$$

$$\therefore kx - 4y + 1 = 0$$

이 직선이 직선 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행하므로

$$\frac{k}{1} = \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{1}$$

$$\therefore k = -2$$

12. 두 원 $x^2 + y^2 = 11$, $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ 의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{11}$

③ 5

④ $2\sqrt{7}$

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

두 원 $x^2 + y^2 = 11$ 과 $(x - 5)^2 + y^2 = 16$
의 공통현의 방정식은

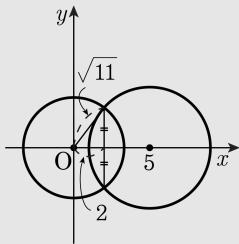
$$(x^2 + y^2 - 11) - (x^2 - 10x + y^2 + 9) = 0$$

$$10x - 20 = 0 \quad \therefore x = 2$$

원 $x^2 + y^2 = 11$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 공통현
 $x = 2$ 사이의 거리가 2이고,

반지름의 길이가 $\sqrt{11}$ 이므로 공통현의 길이는

$$2 \times \sqrt{(\sqrt{11})^2 - 2^2} = 2\sqrt{7}$$



13. 두 원 $x^2+y^2-36=0$, $x^2+y^2-3x+4y-11=0$ 의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{11}$

② $2\sqrt{11}$

③ $3\sqrt{11}$

④ $4\sqrt{11}$

⑤ $5\sqrt{11}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 36 -$$

$$(x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11) = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - 25 = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11 = 0$ 에서

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{69}{4}$$

이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B

$\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면

원 $x^2 + y^2 = 36$ 의 중심 (0,0)과 직선 $\textcircled{7}$ 사이의 거리 $\overline{OM}$ 은

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$$

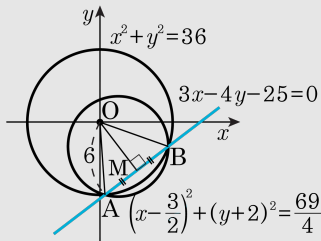
원 $x^2 + y^2 = 36$ 의 반지름의 길이는 6이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AM} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$ 는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{11}$$



14. 두 원 $(x-1)^2 + y^2 = 9$ 와 $(x+2)^2 + y^2 = 24$ 의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

두 원 $(x-1)^2 + y^2 = 9$,

$(x+2)^2 + y^2 = 24$

즉, $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$,

$x^2 + y^2 + 4x - 20 = 0$ 의 공통

현의 방정식은

$(x^2 + y^2 - 2x - 8) -$

$(x^2 + y^2 + 4x - 20) = 0$

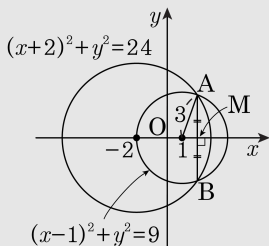
$-6x + 12 = 0 \quad \therefore x = 2$

$(x-1)^2 + y^2 = 9$ 의 중심 $(1, 0)$ 과 $x = 2$ 와의 거리 $d = 1$

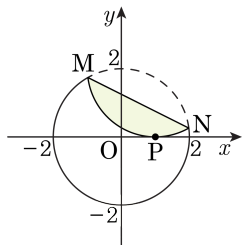
따라서, 다음 그림에서 원의 공통현은 $\overline{AB}$ 이고,

$\overline{AM} = \overline{BM}$ 이므로 공통현의 길이는

$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - 1} = 4\sqrt{2}$



15. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 현 MN 에서 접했을 때, 호 MN 이 점 P(1, 0) 에서 x 축에 접한다면 직선 MN 의 방정식을 $ax + by + c = 0$ 이라 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 그림의 원에서 $x^2 + y^2 = 4 \cdots ①$

호 MN 을 포함하는 원은 x 축에 접하므로

$x = 1$ 위에 중심이 있고, 그 반지름은 2 이다.

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \cdots ②$$

직선 MN 은 두 원 ①, ②의

공통현의 방정식이므로 ① - ②을 하면,

$$x^2 + y^2 - 4 - \{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 4\} = 0$$

$$\therefore 2x + 4y = 5$$

$$\therefore a = 2, b = 4, c = -5$$

$$\therefore a + b + c = 1$$