

1. y 절편이 3이고, 직선 $2x + y - 1 = 0$ 에 수직인 직선의 방정식은?

- ① $y = -2x + 3$ ② $y = -\frac{1}{2}x - 3$ ③ $y = -x + 3$
④ $y = \frac{1}{2}x - 3$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 3$

해설

두 직선이 수직일 조건은
가울기의 곱이 -1 일 때이다.
 $2x + y - 1 = 0$ 에서 $y = -2x + 1$
구하고자 하는 직선의 방정식을
 $y = mx + 3$ 이라면

$$m \times (-2) = -1, \therefore m = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + 3$$

2. 원점을 지나고, 점 (2, 1)에서의 거리가 1인 직선의 방정식은? (단, x 축은 제외)

① $y = \frac{2}{3}x$

② $y = -\frac{2}{3}x$

③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = -\frac{4}{3}x$

⑤ $y = \frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을

$y = kx (k \neq 0)$ 이라 하면,

(2, 1)에서의 거리가 1 이므로

$$\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1, |2k - 1| = \sqrt{k^2 + 1}, k(3k - 4) = 0$$

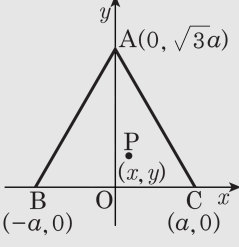
$$k = \frac{4}{3} (\because k \neq 0)$$

$$\therefore y = \frac{4}{3}x$$

3. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?
- ① 삼각형 ② 직선 ③ 선분
④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a, 0)$ 이라고 두면, $B(-a, 0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$\begin{aligned} 2\overline{PA}^2 &= \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{ 이므로} \\ 2\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\} \\ &= (x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\text{정리하여 간단히 하면, } y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

∴ 직선

4. A(0, 6), B(6, -2), C(7, 5)를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD의 꼭짓점 D의 좌표를 구하면?
- ① (1, 0) ② (2, 1) ③ (3, -1)
- ④ (-1, 2) ⑤ (1, 13)

해설

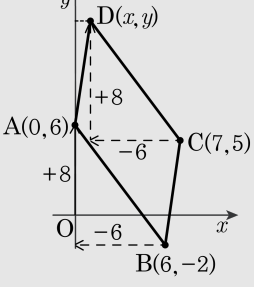
“평행사변형의 대각선은 서로를 이등분한다.”는 성질을 이용하자.

D(x,y)라 하면 $\overline{AC}$ 의 중점 $\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$ 과 $\overline{BD}$ 의 중점 $\left(\frac{6+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right)$ 가 같다.

즉 $6+x=7, -2+y=11$
 $\therefore x=1, y=13$

해설

D(x, y)라 할 때, 평행사변형이므로 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}, \overline{AB} = \overline{CD}$ 이다. 다음 그림과 같이 $x=7-6=1, y=5+8=13$
 $\therefore D(1, 13)$



5. 세 점 A(4, -5), B(-5, 2), C(-8, 3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\triangle ABC$ 에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값이 최소가 될 때, 점 P의 좌표는?

- ① (-3, -3) ② (-3, 0) ③ (0, 0)
④ (3, 0) ⑤ (3, 3)

해설

P(x, y)라 하면

$$\begin{aligned} & \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \\ &= (x-4)^2 + (y+5)^2 + (x+5)^2 + (y-2)^2 + (x+8)^2 + (y-3)^2 \\ &= 3(x+3)^2 + 3y^2 + 116 \end{aligned}$$

따라서 $x = -3, y = 0$ 일 때, $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 은 최소가 된다.

6. 두 점 A(-2, 0), B(2, 0) 에서의 거리의 비가 3 : 1 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때, △ABP 의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\overline{AP} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AP} = 3\overline{BP} \rightarrow \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

$$\text{따라서, } (x+2)^2 + y^2 = 9(x-2)^2 + 9y^2$$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2$$

$$\rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x + 32 = 0$$

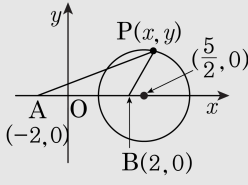
$$\rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0$$

$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

즉, 중심이 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이다.



$$\therefore \text{ 넓이 } S \text{ 의 최댓값} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$$

7. 두 원 $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ 의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현 이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 9) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$$

$$\therefore 8x + 6y - 25 = 0$$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B 라 하고

공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$ 은 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하므로 $\overline{AB} = 2\overline{AM} =$

$$2\sqrt{3^2 - \overline{OM}^2} \dots\dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

그런데 $\overline{OM}$ 은 원점 O에서 직선 $8x + 6y - 25 = 0$ 까지의 거리이므로

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{5}{2} \dots\dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

②을 ①에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$$

