1. y절편이 3이고, 직선 $2x+y-1=0$에 수직인 직선의 방정식은?

① $y=-2x+3$　② $y=-\frac{1}{2}x-3$　③ $y=-x+3$

④ $y=\frac{1}{2}x-3$　⑤ $y=\frac{1}{2}x+3$

해설

두 직선이 수직일 조건은
기울기의 곱이 -1일 때이다.
$2x+y-1=0$에서 $y=-2x+1$
구하고자 하는 직선의 방정식을
$y=mx+3$이라면

$$m\times(-2)=-1,\quad \therefore\ m=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}x+3$$

2. 원점을 지나고, 점 $(2,\ 1)$ 에서의 거리가 1 인 직선의 방정식은? (단, x 축은 제외)

① $y=\frac{2}{3}x$　② $y=-\frac{2}{3}x$　③ $y=\frac{1}{3}x$

④ $y=-\frac{4}{3}x$　⑤ $y=\frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을

$y=kx(k\neq 0)$ 이라 하면,

$(2,\ 1)$ 에서의 거리가 1 이므로

$$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1,\ |2k-1|=\sqrt{k^2+1},\ k(3k-4)=0$$

$$k=\frac{4}{3}\ (\because k\neq 0)$$

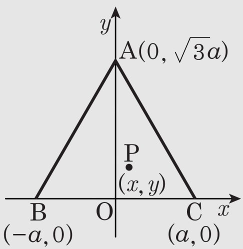
$$\therefore\ y=\frac{4}{3}x$$

3. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형 ② 직선 ③ 선분
④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a, 0)$이라고 두면, $B(-a, 0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$이므로

$$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$$

$$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$$

정리하여 간단히 하면, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

4. A(0, 6), B(6, −2), C(7, 5)를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD의 꼭짓점 D의 좌표를 구하면?

① (1, 0) ② (2, 1) ③ (3, −1)

④ (−1, 2) ⑤ (1, 13)

해설

"평행사변형의 대각선은 서로를 이등분한다."는 성질을 이용하자.

D (x, y) 라 하면 $\overline{AC}$ 의 중점 $\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$ 과 $\overline{BD}$ 의 중점 $\left(\frac{6+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right)$가 같다.

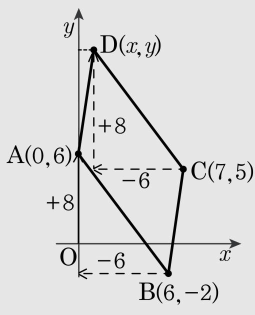
즉 $6+x=7$, $-2+y=11$

$\therefore x=1,\ y=13$

해설

D$(x,\ y)$라 할 때, 평행사변형이므로 $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD}$, $\overline{AB}=\overline{CD}$이다. 다음 그림과 같이 $x=7-6=1$, $y=5+8=13$

$\therefore$ D(1, 13)



5. 세 점 A(4, -5), B(-5, 2), C(-8, 3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 △ABC에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값이 최소가 될 때, 점 P의 좌표는?

① (-3, -3)　② (-3, 0)　③ (0, 0)

④ (3, 0)　⑤ (3, 3)

해설

P(x, y)라 하면

$$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$$
$$=(x-4)^2+(y+5)^2+(x+5)^2+(y-2)^2+(x+8)^2+(y-3)^2$$
$$=3(x+3)^2+3y^2+116$$

따라서 $x=-3$, $y=0$일 때, $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$은 최소가 된다.

6. 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$ 에서의 거리의 비가 $3\ :\ 1$ 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때, $\triangle$ABP 의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

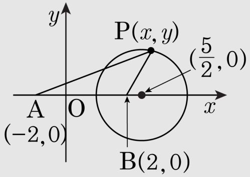
$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(x+2)^2+y^2}$
$\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$
$\overline{\mathrm{AP}}\ :\ \overline{\mathrm{BP}} = 3\ :\ 1$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}} = 3\overline{\mathrm{BP}} \rightarrow \overline{\mathrm{AP}}^2 = 9\overline{\mathrm{BP}}^2$
따라서, $(x+2)^2+y^2 = 9(x-2)^2+9y^2$
$\rightarrow x^2+4x+4+y^2 = 9x^2-36x+36+9y^2$
$\rightarrow 8x^2+8y^2-40x+32 = 0$
$\rightarrow x^2+y^2-5x+4 = 0$

$$\rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2-\frac{25}{4}+4 = 0$$

$$\rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2 = \frac{9}{4}$$

즉, 중심이 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이다.



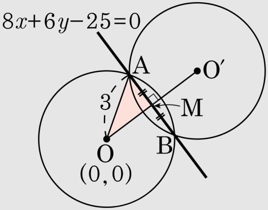
$\therefore$ 넓이 S 의 최댓값 $= \frac{1}{2}\times 4\times\frac{3}{2} = 3$

7. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{5}$　③ $\sqrt{10}$　④ $\sqrt{11}$　⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.



두 원의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-9)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

$\therefore 8x+6y-25=0$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$은 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}\cdots\cdots$㉠

그런데 $\overline{OM}$은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$까지의 거리이므로

$$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{5}{2}\cdots\cdots㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$$