1. 두 원 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $x^2+y^2-6x-8y=0$의 위치관계 중 옳은 것은?

① 서로 외부에 있다

② 외접한다

③ 두 점에서 만난다

④ 내접한다

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다

해설

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$을 정리하면
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$
$x^2+y^2-6x-8y=0$을 정리하면
$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$
$\sqrt{3-1^2+(4-1)^2}<5-1$
따라서 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

2. 두 원 $x^2+y^2=9$, $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$A:\ x^2+y^2=9$
중심 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이 3
$B:\ (x-4)^2+(y-3)^2=4$
중심 $(4,\ 3)$, 반지름의 길이 2
두 원의 중심 사이의 거리를 구하면, $\sqrt{4^2+3^2}=5$
$\therefore$ 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 합과 같다. $\Rightarrow$ 두 원은 외접한다, 교점의 개수 1 개

3. 두 원 $x^2+y^2=a^2$, $(x-3)^2+(y+4)^2=4$가 만나지 않을 조건은? (단, $a>0$)

① $0<a<3$　　② $3<a<7$

③ $a>7$　　④ $0<a<3$ 또는 $a>7$

⑤ $2<a<7$ 또는 $a>7$

해설

두 원의 중심이 각각 $(0,\ 0)$, $(3,\ -4)$이므로

두 원의 중심거리 d는 $d=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

(i) 두 원이 서로 외부에 위치할 때

$d=5>a+2$

$\therefore\ 0<a<3$

(ii) 한 원이 다른 원의 내부에 위치할 때

$d=5<|a-2|$

$\therefore a>7\ (\because\ a>0)$

(i), (ii) 에서 $0<a<3$ 또는 $a>7$

4. 원 $x^2+y^2-2x-1=0$ 와 같은 중심을 가지고 $x+y+1=0$ 에 접하는 원의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ 2π ④ 3π ⑤ 4π

해설

$x^2+y^2-2x-1=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=2$

따라서 구하는 원의 중심 : $(1,\ 0)$

반지름은 중심에서 $x+y+1=0$까지의 거리이므로

$\frac{|1+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\therefore$ 넓이 : 2π

5. 중심이 $C(1,\ 2)$ 이고, 직선 $L\ :\ x+2y=0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

반지름은 $\dfrac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$\therefore$ 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 이므로

$\therefore\ r^2=5$

6. 원 $x^2+y^2=5$ 와 직선 $y=2x+k$ 가 접할 때, k 의 값 또는 그 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : $k=\pm5$

해설

원 $x^2+y^2=5$ 에서 중심의 좌표는 $(0,0)$, 반지름의 길이 $r=\sqrt{5}$ 이다. 한편, 원의 중심에서 직선 $2x-y+k=0$ 까지의 거리를 d 라 하면, $d=\dfrac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}$ 이므로 접할 조건은 $d=r$

따라서, $\dfrac{|-k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ $\quad\therefore\ k=\pm5$

7. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $x + y = k$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ ③ $-1 < k < 1$

④ $-2 < k < 2$ ⑤ $-3 < k < 3$

해설

원과 직선이 두점에서 만난다면, 직선과 원의 중심사이의 거리인 d가 반지름 r보다 작아야 한다.

즉 $d < r$이므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} < 1$$

$\Rightarrow |-k| < \sqrt{2}$

$\therefore -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$

8. $x^2+y^2=r^2, r>0$, $(x-1)^2+\left(y+2\sqrt{2}\right)^2=1$에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 x가 최소한 1개 이상일 때, r의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 3　　② 4　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

원 $x^2+y^2=r^2$의 중심은 $(0,0)$, 반지름의 길이는 r이고,
원 $(x-1)^2+\left(y+2\sqrt{2}\right)^2=1$의 중심은 $\left(1,-2\sqrt{2}\right)$, 반지름의 길이는 1이다.
이 때, 두 원의 중심사이의 거리는
$\sqrt{1^2+\left(-2\sqrt{2}\right)^2}=3$이고,
두 식을 동시에 만족하는 x가 최소한 1개 이상이므로 두 원은 만난다.
즉, $r-1\le 3\le r+1$　$\therefore 2\le r\le 4$
따라서, r의 최댓값은 4, 최솟값은 2이므로 그 합은 $4+2=6$

9. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위는?

① $m < -2\sqrt{2},\ m > 2\sqrt{2}$　　② $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

③ $1 < m < 3$　　④ $m < 1,\ m > 3$

⑤ $m = 1$

해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 $(0,\ 0)$ 에서
직선 $y = mx + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면
$d = \dfrac{|3|}{\sqrt{m^2+1}}$ 이다.
원과 직선이 두 점에서 만날 조건은 $d < r$ 을 만족시킨다.

$$\frac{|3|}{\sqrt{m^2+1}} < 1 \Rightarrow |3| < \sqrt{m^2+1}$$
$$\Rightarrow 9 < m^2 + 1$$
$$\Rightarrow m^2 > 8$$

$\therefore\ m < -2\sqrt{2}$ 또는 $m > 2\sqrt{2}$