

1. 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$A : x^2 + y^2 = 9$
중심 $(0, 0)$, 반지름의 길이 3
 $B : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$
중심 $(4, 3)$, 반지름의 길이 2
두 원의 중심 사이의 거리를 구하면, $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
 $\therefore$ 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 합과
같다. $\Rightarrow$ 두 원은 외접한다, 교점의 개수 1 개

3. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 의 위치관계 중 옳은 것은?
- ① 서로 외부에 있다
 - ② 외접한다
 - ③ 두 점에서 만난다
 - ④ 내접한다
 - ⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다

해설

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 을 정리하면

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 을 정리하면

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$$

$$\sqrt{3 - 1^2 + (4 - 1)^2} < 5 - 1$$

따라서 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

4. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과 직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

5. 직선 $x + y + k = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ 에 접할 때, 실수 k 의 값은?

① ± 2

② $\pm 2\sqrt{2}$

③ ± 3

④ $\pm 3\sqrt{2}$

⑤ $\pm 5\sqrt{2}$

해설

$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ 은

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

직선 $x + y + k = 0$ 과 원

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

가 접하므로

원의 중심과 직선 사이의

거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 한다.

$\frac{|1 - 1 + k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$|k| = 2 \quad \therefore k = \pm 2$

6. 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접할 때, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 은?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

접선이므로 원 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4}$$

7. 점 A(5,3), B(1,1) 을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?
- ① $-12 < k < -2$ ② $-11 < k < -1$ ③ $-10 < k < 0$
④ $-9 < k < 1$ ⑤ $-8 < k < 3$

해설

두 점 A(5,3), B(1,1) 의 중점이 (3,2) 이

므로 원의 중심의 좌표는(3,2)

점B와 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$$

따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$

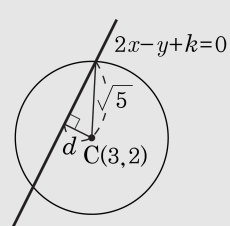
원의 방정식은 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{5})^2$

원의 중심 C(3,2) 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 에 이르는 거리는

$$d = \frac{|2 \cdot 3 - 2 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k+4|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}$$

$$|k+4| < 5, -5 < k+4 < 5$$

$$\therefore -9 < k < 1$$



8. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 2x + k$ 과 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위를 구하면?

① $k = \sqrt{5}$

② $k = -\sqrt{5}$

③ $k = 2\sqrt{5}$

④ $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

⑤ $k > \sqrt{5}, k < \sqrt{5}$

해설

원과 직선이 두 점에서 만나려면 직선과 원의 중심 사이의 거리가 반지름보다 작아야 한다.

⇒ 직선과 중심 사이의 거리는

$$\frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} < 1$$

⇒ $|k| < \sqrt{5}$

⇒ $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

9. 중심이 C(1, 2)이고, 직선 L : $x + 2y = 0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

$$\text{반지름은 } \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

∴ 구하는 원의 방정식은

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \text{ 이므로}$$

$$\therefore r^2 = 5$$

10. 좌표평면에서 점 $(2, -3)$ 을 중심으로 하고 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 에 접하는 원의 넓이는?

① 4π ② 6π ③ 8π ④ 9π ⑤ 12π

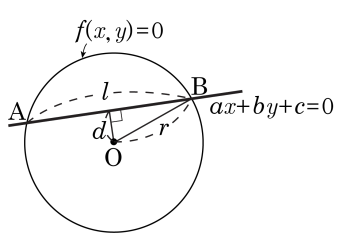
해설

점 $(2, -3)$ 에서 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 까지의 거리가 구하는 원의 반지름이므로

$$r = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3$$

따라서 원의 넓이는 9π

11. 원의 방정식 $f(x, y) = 0$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 이 다음 그림과 같이 위치해 있을 때, 도형의 방정식 $f(x, y) + k(ax + by + c) = 0$ 이 나타낼 수 있는 도형의 최소 넓이는?



- $$\textcircled{1} \quad \pi(r - d^2)$$

- $$\textcircled{2} \pi r^2$$

- $$\textcircled{3} \pi \left(\frac{1}{2} l \right)^2$$

- $$\textcircled{4} \quad \pi(r^2 + q^2)$$

- ⑤ πl^2

해설

도형의 넓이가 최소일 때는 l 이 지름일 때 이므로

도형의 넓이는 $\pi\left(\frac{1}{2}l\right)^2$ 이 정답이다.

12. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위는?

- ① $m < -2\sqrt{2}, m > 2\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$
③ $1 < m < 3$ ④ $m < 1, m > 3$
⑤ $m = 1$

해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선 $y = mx + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{m^2 + 1}} \text{ 이다.}$$

원과 직선이 두 점에서 만날 조건은 $d < r$ 을 만족시킨다.

$$\frac{|3|}{\sqrt{m^2 + 1}} < 1 \Rightarrow |3| < \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 9 < m^2 + 1$$

$$\Rightarrow m^2 > 8$$

$$\therefore m < -2\sqrt{2} \text{ 또는 } m > 2\sqrt{2}$$