1. 두 원 O_1, O_2의 중심거리가 $d = 7$이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1, r_2가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다. ② 내접한다.
③ 두 점에서 만난다. ④ 만나지 않는다.
⑤ 네 점에서 만난다.

해설
$d = r_1 + r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

2. 다음은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다) 에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

> $x^2 + y^2 = 1 \cdots$ ㉠
> $y = 2x + k \cdots$ ㉡
> ㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면
> $5x^2 + 4kx + k^2 - 1 = 0 \cdots$ ㉢
> ㉠과 ㉡이 서로 만나지 않으려면
> $D = (4k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (k^2 - 1)$
> (가)0
> k^2(나)5 $\quad \therefore$ (다)

① (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

② (가):= , (나):= , (다):$k = \pm\sqrt{5}$

③ (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

④ (가):> , (나):> , (다):$k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

⑤ (가):< , (나):> , (다):$k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.
(나): 판별식을 정리하면, $k^2 > 5$
(다): $k^2 - 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

3. 서로 다른 두 점에서 만나는 두 원 O, O′이 있다. 이 두 원의 반지름을 각각 r, r'이라 하고 두 원의 중심 간의 거리를 d라 할 때, 이 두 원의 성질을 옳게 나타낸 것은?

① $d > r + r'$

② $d < |r - r'|$

③ 공통외접선은 1개이다.

④ 공통내접선은 2개이다.

⑤ 두 원의 공통현은 1개이다.

해설

① $d < r + r'$
② $d > |r - r'|$
③ 공통외접선은 2개이다.
④ 공통내접선은 없다.

4. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

㉠ $x^2+y^2=1,\quad (x-2)^2+(y-1)^2=4$
㉡ $(x+1)^2+y^2=2,\quad x^2+(y+3)^2=2$
㉢ $x^2+y^2=2,\quad (x+1)^2+(y-1)^2=8$
㉣ $x^2+y^2=4,\quad (x-3)^2+(y+4)^2=9$
㉤ $x^2+y^2-2x=0,\quad x^2+y^2-4x+2y+4=0$

① ㉠　　② ㉠, ㉤　　③ ㉡
④ ㉢, ㉣　　⑤ ㉡, ㉤

해설

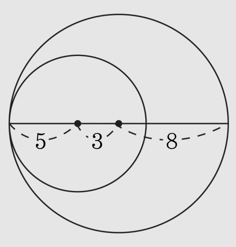
서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
$|r-r'|<d<|r+r'|$ 이어야 한다.
㉡ 만나지 않는다.
㉢ 내접한다.
㉣ 외접한다.

5. 반지름의 길이가 5cm, 8cm인 두 원의 중심거리가 3cm 일 때, 두 원의 위치관계는?

① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.
② 두 원이 외접한다.
③ 두 원이 두 점에서 만난다.
④ 두 원이 내접한다.
⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5 인 원이 반지름이 8인 원 안에 내접한다.



6. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-8x+6y+k=0$ 의 교점이 1 개 이상 존재하기 위한 정수 k 의 개수는?

① 18 개 ② 19 개 ③ 20 개 ④ 21 개 ⑤ 22 개

해설

$\Rightarrow \quad x^2+y^2=1, (x-4)^2+(y+3)^2=25-k$

교점이 1 개 이상이 되려면 중심사이 거리가 반지름의 합 이하가 되어야 하고 반지름의 차 이상이 되어야 한다.

$\Rightarrow \quad \sqrt{25-k}-1 \leq \sqrt{3^2+4^2} \leq \sqrt{25-k}+1$

$\Rightarrow \quad 25-k \leq 36,\ 25-k \geq 16$

$\Rightarrow \quad -11 \leq k \leq 9$

$\therefore$ 정수 k 의 개수는 21 개

7. 점(2, 1) 을 중심으로 하고, 직선 $x+y-5=0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 4　⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1) 에서
직선 $x+y-5=0$ 까지의 거리이므로
$r=\frac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

8. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: ________ 개

▷ 정답: 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

9. 원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-2<k<2$　② $0<k<4$　③ $-4<k<0$
④ $-2<k<0$　⑤ $-4<k<4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구하면
$d=\dfrac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$
이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로
원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이고
$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$　$\therefore\ -4<k<4$

10. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$　　② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$　　④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0+0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

11. 직선 $y=-2x+a$가 원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 에서
$(x-2)^2+(y-1)^2=1$
직선 $y=-2x+a$ 가 원의 중심 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로
$a=2\times2+1=5$

12. 원 $x^2+y^2+2y=0$과 직선 $y=mx-3$이 만나지 않을 때, 상수 m 의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$　　② $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

③ $-1<m<1$　　④ $-2<m<2$

⑤ $-3<m<3$

해설

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y=0 & \cdots ㉠ \\ y=mx-3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$(m^2+1)x^2-4mx+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-3(m^2+1)=m^2-3$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}=m^2-3<0$

$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

해설

㉠, ㉡을 변형하면

각각 $x^2+(y+1)^2=1, mx-y-3=0$

이 때, 원의 중심 $(0,-1)$ 에서

직선 $y=mx-3$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$d=\frac{|1-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$

원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}>1$ 이어야 하므로

$\sqrt{m^2+1}<2, m^2<3$

$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

13. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

이때, $d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

14. 직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

③ $-2 < m < 2$ ④ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

⑤ $-4 < m < 4$

해설

직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과
서로 만나지 않으므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선까지의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

$$\frac{5}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} > 1$$

$\therefore \sqrt{m^2 + 1} < 5$ 양변을 제곱하여 정리하면
$m^2 + 1 - 25 < 0,\ \ m^2 - 24 < 0$
$(m - 2\sqrt{6})(m + 2\sqrt{6}) < 0$
$\therefore -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

15. 원 $x^2+y^2=k$ 와 직선 $y=-x+1$ 이 만나지 않기 위한 실수 k 의 값의 범위는? (단, $k>0$)

① $0<k<\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{2}<k<1$　③ $1<k<\frac{3}{2}$
④ $\frac{3}{2}<k<2$　⑤ $k>2$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면 원의 중심과 직선 사이의 거리 d 와 반지름의 길이 r 에 대하여 $d>r$ 이어야 한다.

$d=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}>\sqrt{k}$ (단, $k>0$)

$\therefore 0<k<\frac{1}{2}$

16. 원 $x^2+y^2=2$ 와 직선 $y=-x+k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k<0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=-2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.
$\Rightarrow$ 중심 : $(0,\ 0)$ 직선 : $x+y-k=0$
$\frac{|1\times0+1\times0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ $k=\pm2$
$\therefore$ $k=-2$ ($\because$ $k<0$)

17. $x^2+y^2=1$일 때, $2x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

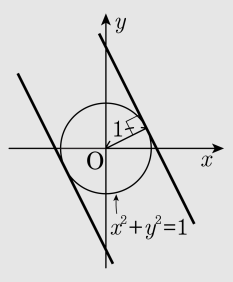
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x+y=k$라 하면 $y=-2x+k$에서 k는 기울기가 -2인 직선의 y절편이다.
주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로 점과 직선사이의 거리에서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{5}} \le 1$

$\therefore\ -5 \le k \le \sqrt{5}$

18. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$\frac{|a|}{5} < 2$, $|a| < 10$, $-10 < a < 10$

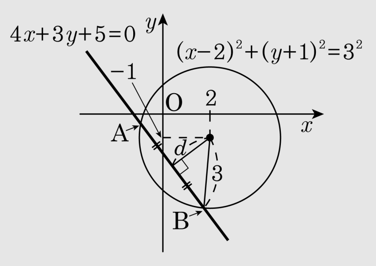
$a = -9, -8, -7, -6, \cdots, 6, 7, 8, 9$ $\therefore$ 19 개

19. 원 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$과 직선 $4x+3y+5=0$이 만나서 생기는 현의 길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{5}+1$ ③ $2\sqrt{5}$

④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $3\sqrt{5}-1$

해설



$x^2+y^2-4x+2y-4=0$

$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+(y+1)^2=3^2$

$(2,-1)$에서 직선 $4x+3y+5=0$에

이르는 거리 d는, $d=\dfrac{|8-3+5|}{\sqrt{16+9}}$

직선과 원과의 두 교점을 각각 A, B라 하면

$\therefore \ \dfrac{\overline{AB}}{2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \ \overline{AB}=2\sqrt{5}$

20. 두 점 A$(-1, 3)$, B$(2, a)$를
지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접할 때, a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 점 A$(-1, 3)$, B$(2, a)$ 를

지나는 직선의 방정식은, $y - 3 = \frac{a-3}{3}(x+1)$

$\therefore\ (a-3)x - 3y + a + 6 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접하므로
원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 ㉠에 이르는 거리가
원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

$\therefore\ \frac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}} = 1$

$\therefore\ |a+6| = \sqrt{(a-3)^2+9} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변을 제곱하면 $a^2+12a+36 = a^2-6a+9+9$,$18a = -18$

$\therefore\ a = -1$

21. 원 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$ 과 직선 $3x+4y-a=0$이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$(x-3)^2+(y-1)^2=2^2$

원의 중심 $(3,1)$ 에서 직선까지의 거리 d가 2이면 접하므로

$$d=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 1-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$\therefore\ |13-a|=10 \Leftrightarrow 13-a=\pm 10$

따라서, $a=3$ 또는 23 이므로

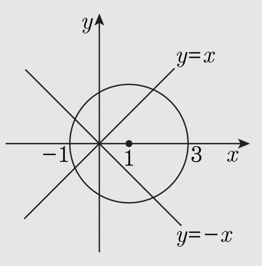
모든 a 값들의 합은 26

22. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 의 해의 개수를 구하면?

① 없다. ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\therefore\ x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm x$



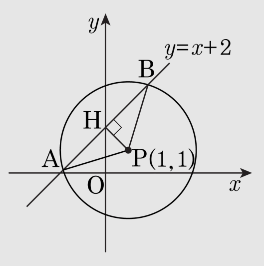
$\therefore\ (x-1)^2 + y^2 = 2^2$

즉, 해는 4 개이다.

23. 중심이 (1, 1) 이고, 반지름이 3 인 원과 직선 $y = x + 2$ 가 두 점 A, B 에서 만난다. 이 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설



그림에서 원의 중심을 P, 점 P 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{\mathrm{PH}} = \dfrac{|1-1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = 2 \cdot \overline{\mathrm{AH}} = 2\sqrt{7}$

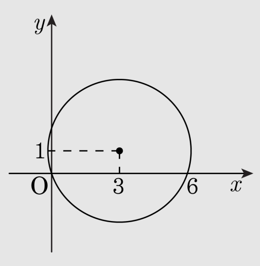
24. 원 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형에 의하여 x 축이 잘렸을 때, 잘린 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 을 표준형으로 고치면,
$(x-1)^2+(y-3)^2=10$,
이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면,
$(x-3)^2+(y-1)^2=10$ $\cdots$ ㉠

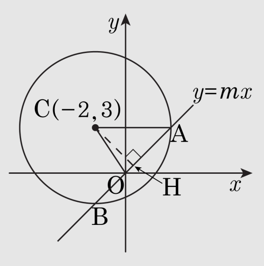


㉠의 그래프는 다음 그림과 같으므로
$y=0$ 일 때의 x 의 값을 구하면
$(x-3)^2+(0-1)^2=10$ 에서
$x^2-6x=0$, $x(x-6)=0$
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=6$
따라서 잘린 선분의 길이는 6 이다.

25. 직선 $y = mx$ 와 원 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 의 두 교점을 A, B 라 할 때, 현 AB 의 길이가 최소가 되도록 하는 상수 m 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$　　② $-\frac{2}{3}$　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{2}{3}$　　⑤ $\frac{3}{2}$

해설



그림과 같이 원의 중심 C(−2, 3) 에서
직선 $y = mx$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면
$\triangle$CAH 에서 $\overline{AH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CH}^2$
$= 25 - \overline{CH}^2$
따라서 $\overline{CH}$ 가 최대일 때, $\overline{AH}$가 최소이다.
$\triangle$COH 에서 $\overline{CH}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OH}^2$
$\overline{CH}$가 최대가 되기 위해서는
$\overline{CH} = \overline{CO}$ $(\overline{OH} = 0)$ 일 때이므로
$\overline{CO} \perp \overline{AB}$
직선 OC 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이므로 $m = \frac{2}{3}$