

1. 두 원 O_1 , O_2 의 중심거리가 $d = 7$ 이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1 , r_2 가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다.

② 내접한다.

③ 두 점에서 만난다.

④ 만나지 않는다.

⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d = r_1 + r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

2. 다음은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

$$x^2 + y^2 = 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y = 2x + k \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면

$$5x^2 + 4kx + k^2 - 1 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠과 ㉡이 서로 만나지 않으려면

$$D = (4k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (k^2 - 1)$$

(가) 0

k^2 (나) 5 $\therefore$ (다)

- ① (가):> , (나):< , (다):- $\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$
 ② (가):= , (나):= , (다): $k = \pm \sqrt{5}$
 ③ (가):> , (나):< , (다):- $\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$
 ④ (가):> , (나):> , (다): $k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$
 ⑤ (가):< , (나):> , (다): $k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.

(나): 판별식을 정리하면, $k^2 > 5$

(다): $k^2 - 5 > 0 \Rightarrow k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

3. 서로 다른 두 점에서 만나는 두 원 O , O' 이 있다. 이 두 원의 반지름을 각각 r , r' 이라 하고 두 원의 중심 간의 거리를 d 라 할 때, 이 두 원의 성질을 옳게 나타낸 것은?

① $d > r + r'$

② $d < |r - r'|$

③ 공통외접선은 1개이다.

④ 공통내접선은 2개이다.

⑤ 두 원의 공통현은 1개이다.

해설

① $d < r + r'$

② $d > |r - r'|$

③ 공통외접선은 2개이다.

④ 공통내접선은 없다.

4. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

㉠ $x^2 + y^2 = 1, \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

㉡ $(x+1)^2 + y^2 = 2, \quad x^2 + (y+3)^2 = 2$

㉢ $x^2 + y^2 = 2, \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 8$

㉣ $x^2 + y^2 = 4, \quad (x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$

㉤ $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

① ㉠

② ㉠, ㉤

③ ㉡

④ ㉢, ㉣

⑤ ㉣, ㉤

해설

서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
 $|r - r'| < d < |r + r'|$ 이어야 한다.

㉡ 만나지 않는다.

㉢ 내접한다.

㉣ 외접한다.

5. 반지름의 길이가 5cm, 8cm 인 두 원의 중심거리가 3cm 일 때, 두 원의 위치관계는?

① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

② 두 원이 외접한다.

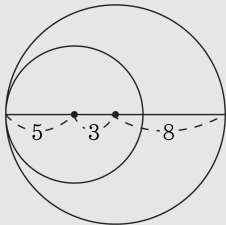
③ 두 원이 두 점에서 만난다.

④ 두 원이 내접한다.

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5인 원이 반지름이 8인 원 안에 내접한다.



6. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 8x + 6y + k = 0$ 의 교점이 1 개 이상 존재하기 위한 정수 k 의 개수는?

① 18 개 ② 19 개 ③ 20 개 ④ 21 개 ⑤ 22 개

해설

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1, (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25 - k$$

교점이 1 개 이상이 되려면 중심사이 거리가
반지름의 합 이하가 되어야 하고 반지름의 차
이상이어야 한다.

$$\Rightarrow \sqrt{25 - k} - 1 \leq \sqrt{3^2 + 4^2} \leq \sqrt{25 - k} + 1$$

$$\Rightarrow 25 - k \leq 36, 25 - k \geq 16$$

$$\Rightarrow -11 \leq k \leq 9$$

$\therefore$ 정수 k 의 개수는 21 개

7. 점(2, 1) 을 중심으로 하고, 직선 $x + y - 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 4

⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1) 에서
직선 $x + y - 5 = 0$ 까지의 거리이므로

$$r = \frac{|2 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

8. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

9. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < 2$

② $0 < k < 4$

③ $-4 < k < 0$

④ $-2 < k < 0$

⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 를 구하면

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$ 이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore -4 < k < 4$$

10. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$

② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$

④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

11. 직선 $y = -2x + a$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a 의 값은 ?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 $(2, 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로

$$a = 2 \times 2 + 1 = 5$$

12. 원 $x^2 + y^2 + 2y = 0$ 과 직선 $y = mx - 3$ 이 만나지 않을 때, 상수 m 의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

② $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$

③ $-1 < m < 1$

④ $-2 < m < 2$

⑤ $-3 < m < 3$

해설

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 0 & \cdots \textcircled{㉠} \\ y = mx - 3 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$(m^2 + 1)x^2 - 4mx + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-2m)^2 - 3(m^2 + 1) = m^2 - 3$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4} = m^2 - 3 < 0$

$$\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$$

해설

㉠, ㉡을 변형하면

$$\text{각각 } x^2 + (y + 1)^2 = 1, mx - y - 3 = 0$$

이 때, 원의 중심 $(0, -1)$ 에서

직선 $y = mx - 3$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$$d = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\sqrt{m^2 + 1} < 2, m^2 < 3$$

$$\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$$

13. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$$

▶ 답: 개

▷ 정답: 0 개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{이때, } d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

14. 직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

③ $-2 < m < 2$

④ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

⑤ $-4 < m < 4$

해설

직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과
서로 만나지 않으므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선까지의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

$$\frac{5}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} > 1$$

$\therefore \sqrt{m^2 + 1} < 5$ 양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2 + 1 - 25 < 0, \quad m^2 - 24 < 0$$

$$(m - 2\sqrt{6})(m + 2\sqrt{6}) < 0$$

$$\therefore -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$$

15. 원 $x^2 + y^2 = k$ 와 직선 $y = -x + 1$ 이 만나지 않기 위한 실수 k 의 값의 범위는? (단, $k > 0$)

① $0 < k < \frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2} < k < 1$

③ $1 < k < \frac{3}{2}$

④ $\frac{3}{2} < k < 2$

⑤ $k > 2$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면 원의 중심과 직선 사이의 거리 d 와 반지름의 길이 r 에 대하여 $d > r$ 이어야 한다.

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} > \sqrt{k} \quad (\text{단, } k > 0)$$

$$\therefore 0 < k < \frac{1}{2}$$

16. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.

$$\Rightarrow \text{중심} : (0, 0) \quad \text{직선} : x + y - k = 0$$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow k = \pm 2$$

$$\therefore k = -2 \quad (\because k < 0)$$

17. $x^2 + y^2 = 1$ 일 때, $2x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

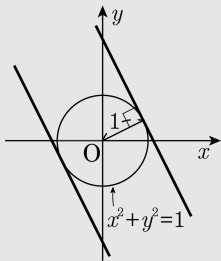
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x + y = k$ 라 하면 $y = -2x + k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.

주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로

점과 직선사이의 거리에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} \leq 1$

$\therefore -5 \leq k \leq \sqrt{5}$

18. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$$\frac{|a|}{5} < 2, |a| < 10, -10 < a < 10$$

$$a = -9, -8, -7, -6, \dots, 6, 7, 8, 9 \therefore 19 \text{ 개}$$

19. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ 과 직선 $4x + 3y + 5 = 0$ 이 만나서 생기는 현의 길이는?

① $\sqrt{5}$

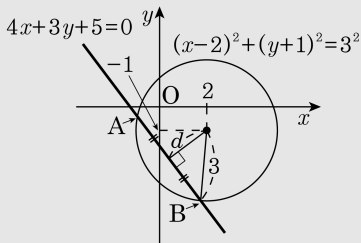
② $\sqrt{5} + 1$

③ $2\sqrt{5}$

④ $3\sqrt{5}$

⑤ $3\sqrt{5} - 1$

해설



$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2$$

(2, -1)에서 직선 $4x + 3y + 5 = 0$ 에

$$\text{이르는 거리 } d \text{는, } d = \frac{|8 - 3 + 5|}{\sqrt{16 + 9}}$$

직선과 원과의 두 교점을 각각 A, B라 하면

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\sqrt{5}$$

20. 두 점 A(-1, 3), B(2, a) 를
지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접할 때, a의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 점 A(-1, 3), B(2, a) 를

지나는 직선의 방정식은, $y - 3 = \frac{a - 3}{3}(x + 1)$

$$\therefore (a - 3)x - 3y + a + 6 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

직선 ㉠이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접하므로

원의 중심 (0, 0) 에서 직선 ㉠에 이르는 거리가
원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

$$\therefore \frac{|a + 6|}{\sqrt{(a - 3)^2 + 9}} = 1$$

$$\therefore |a + 6| = \sqrt{(a - 3)^2 + 9} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡의 양변을 제곱하면 $a^2 + 12a + 36 = a^2 - 6a + 9 + 9, 18a = -18$

$$\therefore a = -1$$

21. 원 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ 과 직선 $3x + 4y - a = 0$ 이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

원의 중심 $(3, 1)$ 에서 직선까지의 거리 d 가 2 이면 접하므로

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\therefore |13 - a| = 10 \Leftrightarrow 13 - a = \pm 10$$

따라서, $a = 3$ 또는 23 이므로

모든 a 값들의 합은 26

22. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 의 해의 개수를 구하면?

① 없다.

② 1

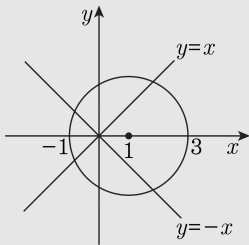
③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\therefore x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x$$



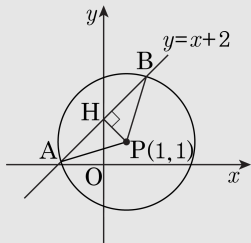
$$\therefore (x-1)^2 + y^2 = 2^2$$

즉, 해는 4 개이다.

23. 중심이 (1, 1) 이고, 반지름이 3 인 원과 직선 $y = x + 2$ 가 두 점 A, B 에서 만난다. 이 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?

- ① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설



그림에서 원의 중심을 P, 점 P 에서
선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{PH} = \frac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = 2 \cdot \overline{AH} = 2\sqrt{7}$$

24. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 도형에 의하여 x 축이 잘렸을 때, 잘린 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

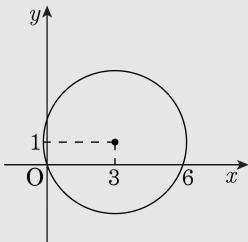
해설

원 $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ 을 표준형으로 고치면,

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10,$$

이 원을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면,

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10 \cdots \textcircled{7}$$



⑦의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$y = 0$ 일 때의 x 의 값을 구하면

$$(x-3)^2 + (0-1)^2 = 10 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 6x = 0, x(x-6) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 6$$

따라서 잘린 선분의 길이는 6 이다.

25. 직선 $y = mx$ 와 원 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 의 두 교점을 A, B 라 할 때, 현 AB 의 길이가 최소가 되도록 하는 상수 m 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$

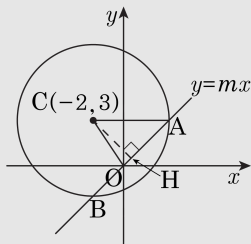
② $-\frac{2}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{3}{2}$

해설



그림과 같이 원의 중심 $C(-2, 3)$ 에서
직선 $y = mx$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\begin{aligned}\triangle CAH \text{에서 } \overline{AH}^2 &= \overline{CA}^2 - \overline{CH}^2 \\ &= 25 - \overline{CH}^2\end{aligned}$$

따라서 $\overline{CH}$ 가 최대일 때, $\overline{AH}$ 가 최소이다.

$$\triangle COH \text{에서 } \overline{CH}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OH}^2$$

$\overline{CH}$ 가 최대가 되기 위해서는

$$\overline{CH} = \overline{CO} \quad (\overline{OH} = 0) \quad \text{일 때이므로}$$

$$\overline{CO} \perp \overline{AB}$$

직선 OC 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이므로 $m = \frac{2}{3}$