

1. 다음은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다) 에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

$$x^2 + y^2 = 1 \cdots \textcircled{가}$$
$$y = 2x + k \cdots \textcircled{나}$$

②을 ①에 대입하여 식을 정리하면

$$5x^2 + 4kx + k^2 - 1 = 0 \cdots \textcircled{다}$$

②과 ①이 서로 만나지 않으려면

$$D = (4k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (k^2 - 1)$$

(가) 0
 k^2 (나) 5 ∴ (다)

- ① (가):> , (나):< , (다):- $\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$
- ② (가):= , (나):= , (다): $k = \pm \sqrt{5}$
- ③ (가):> , (나):< , (다):- $\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$
- ④ (가):> , (나):> , (다): $k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$
- ⑤ (가):< , (나):> , (다): $k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.
(나): 판별식을 정리하면, $k^2 > 5$
(다): $k^2 - 5 > 0 \Rightarrow k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

2. 점(2, 1)을 중심으로 하고, 직선 $x + y - 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1)에서
직선 $x + y - 5 = 0$ 까지의 거리이므로

$$r = \frac{|2 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

3. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과
직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

4. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-2 < k < 2$ ② $0 < k < 4$ ③ $-4 < k < 0$
④ $-2 < k < 0$ ⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 를 구하면

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$ 이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore -4 < k < 4$$

5. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$

② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$

④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

6. 직선 $y = -2x + a$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a 의 값은 ?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 (2, 1)을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로

$$a = 2 \times 2 + 1 = 5$$

7. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$

② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$

④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$

⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식

$$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\textcircled{1}$ 이

실근을 갖지 않아야 하므로

$$\frac{D}{4} < 0 \text{ 에서 } -b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$$

$$\therefore b < -2\sqrt{5} \text{ 또는 } b > 2\sqrt{5}$$

8. 원 $x^2 + y^2 + 2y = 0$ 과 직선 $y = mx - 3$ 이 만나지 않을 때, 상수 m 의 범위를 구하면?

㉠ $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

㉡ $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$

㉢ $-1 < m < 1$

㉣ $-2 < m < 2$

㉤ $-3 < m < 3$

해설

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ y = mx - 3 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②을 ①에 대입하여 정리하면

$$(m^2 + 1)x^2 - 4mx + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-2m)^2 - 3(m^2 + 1) = m^2 - 3$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4} = m^2 - 3 < 0$

$$\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$$

해설

①, ②을 변형하면

$$\text{각각 } x^2 + (y + 1)^2 = 1, mx - y - 3 = 0$$

이 때, 원의 중심 $(0, -1)$ 에서

직선 $y = mx - 3$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$$d = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\sqrt{m^2 + 1} < 2, m^2 < 3$$

$$\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$$

9. 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설

주어진 직선이 원에 접하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{4}(ab)^2 \quad \dots \quad \text{㉠}$$

산술기하 조건에 의해 $a^2 + b^2 \geq 2ab$

즉, $a^2 + b^2 = 2ab$ 일 때 최소이다.

$$\text{㉠에 대입시키면, } 2ab = \frac{1}{4}(ab)^2$$

$$\therefore ab = 8$$

$$\therefore a^2 + b^2 \text{ 의 최솟값은 } 2ab = 16$$

10. 점 A(5, 3), B(1, 1)을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?
- ① $-12 < k < -2$ ② $-11 < k < -1$ ③ $-10 < k < 0$
④ $-9 < k < 1$ ⑤ $-8 < k < 3$

해설

두 점 A(5, 3), B(1, 1)의 중점이 (3, 2)이므로 원의 중심의 좌표는 (3, 2) 점 B와 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$

따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$

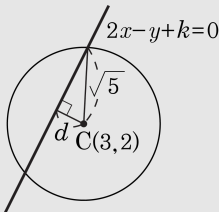
원의 방정식은 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{5})^2$

원의 중심 C(3, 2)에서 직선 $2x - y + k = 0$ 에 이르는 거리는

$$d = \frac{|2 \cdot 3 - 2 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k + 4|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}$$

$$|k + 4| < 5, -5 < k + 4 < 5$$

$$\therefore -9 < k < 1$$



11. 원 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 를 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 도형이 직선 $y = -x + 1$ 에 의하여 잘린 현의 길이를 구하면?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

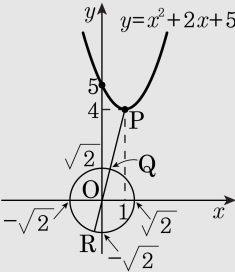
원 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 을 x 축에 대하여 대칭 이동시키면 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 가 된다.
이 원이 직선 $y = -x + 1$ 과 만나는 점은 $(-1, 2)$ 와 $(1, 0)$ 이다.
따라서 피타고라스의 정리에 의해 현의 길이를 구하면 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 이다.

12. 포물선 $y = x^2 - 2x + 5$ 위의 임의의 한 점 $P(x, y)$ 라 한다. 점 P 에서 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 차를 구하면?

- ① $2\sqrt{2}$
- ② 2
- ③ $\sqrt{2}$
- ④ 4
- ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

그림과 같이 포물선 위의 한 점 P 에서 원에 이르는 거리의 최솟값은 $\overline{OP} - (\text{반지름의 길이})$ 이고, 최댓값은 $\overline{OP} + (\text{반지름의 길이})$ 가 된다.
따라서, 구하는 최소 길이는 $\overline{PQ}$ 이고,
최대 길이는 $\overline{PR}$ 이므로
 $|\overline{PR} - \overline{PQ}| = (\text{원의 지름의 길이}) = 2\sqrt{2}$



13. 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위의 점 P에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 (0, 4) 이고, 반지름의 길이는 5이다.
그런데 중심 (0, 4) 에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$

까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 4 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{40}{5} = 8$$

따라서 구하는 최소 거리는

$$d - (\text{원의 반지름의 길이}) = 8 - 5 = 3$$

14. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 위의 점에서 직선 $y = -x + 4$ 에 이르는 최소 거리는?

① $\sqrt{2} - 1$

② $\sqrt{2}$

③ 3

④ $\sqrt{2} + 1$

⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 은 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 이므로
원의 중심 $(1, 1)$ 에서 직선 $x + y - 4 = 0$ 까지의 거리 d 는

$$d = \frac{|1 + 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

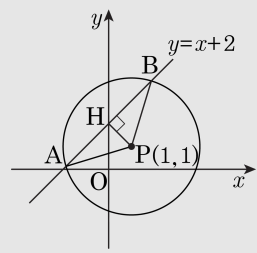
따라서 구하는 최소 거리는

$$d - (\text{원의 반지름의 길이}) = \sqrt{2} - 1$$

15. 중심이 (1, 1) 이고, 반지름이 3 인 원과 직선 $y = x + 2$ 가 두 점 A, B 에서 만난다. 이 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설



그림에서 원의 중심을 P, 점 P 에서
선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{PH} = \frac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = 2 \cdot \overline{AH} = 2\sqrt{7}$$

16. 한 점 $A(-2, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할때, $M + m$ 의 값은?

- ① $2\sqrt{31}$
 ② $4\sqrt{2} + 2\sqrt{31}$
 ③ $2\sqrt{34}$
- ④ $4\sqrt{2} + 2\sqrt{34}$
 ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = (x-1)^2 + (y+2)^2 - 8 = 0$$

에서

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

그림에서 점과 원 사이의 거리의 최댓값은
(점과 원의 중심 사이의 거리)+(반지름)
즉 $\sqrt{(-2-1)^2 + (3+2)^2} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{34}$
최솟값은 (점과 원의 중심 사이의 거리)-반지름
= $\sqrt{34} - 2\sqrt{2}$
 $\therefore M + m = 2\sqrt{34}$

17. 점 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때, 점 $P(a, b)$, $Q(a, 0)$, $O(0, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 최대 넓이는?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

a, b 의 부호와 상관 없으므로

$a > 0, b > 0$ 이라 하면

$\triangle POQ$ 의 넓이 : $\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2}ab$

P 가 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 이므로 $a^2 + b^2 = 1$

산술기하조건을 이용하면,

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \times b^2} = 2ab$$

$$ab \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{넓이의 최댓값 : } \frac{1}{4}$$

18. 두 점 A(1, 0), B(4, 0)으로부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{AP} = 2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$(x-1)^2 + y^2 = 4\{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore (x-5)^2 + y^2 = 4$

따라서 점 P는 중심이 (5, 0)이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의

발을

H라 하면 $\overline{PH}$ 의 길이가

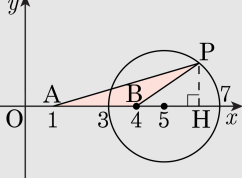
반지름의 길이와 같을 때 삼각형 PAB

의 넓이가

최대가 되므로 $\Delta PAB = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{PH} \leq$

$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은 3이다.



19. A지점에 있는 레이더화면에는 반경 $30\sqrt{3}km$ 내의 모든 선박이 나타난다고 한다. 지금 A지점의 서쪽 60km 해상에서 한 척의 배가 북동쪽 정방향으로 매시 12km의 속력으로 가고 있다. 이 배는 레이더 화면에 몇 시간 동안 나타나는가?
- ① 3시간

② 3시간 30분

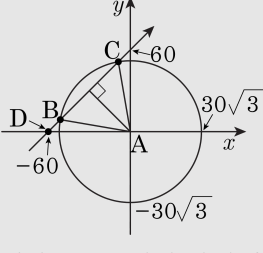
③ 4시간

④ 5시간

⑤ 6시간

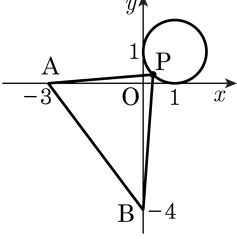
해설

다음 그림에서 A 지점의 위치와 배의 처음 위치를 각각 A(0, 0), D(-60, 0) 이라 하면 배의 진행방향을 나타내는 직선의 방정식은 $y = x + 60$ ($\because$ 북동 정방향이면 직선과 x 축은 45° 의 각을 이루므로 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ = 1$ 이다.)



배가 B , C 위치 사이에 있을 때 레이더 화면에 나타나므로 $\overline{BC}$ 의 길이를 구한다.
A(0, 0) 에서 직선 $y = x + 60$ 에 이르는 거리는 $\frac{|60|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 30\sqrt{2}$
중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분하므로 $\overline{BC} = 2\sqrt{(30\sqrt{3})^2 - (30\sqrt{2})^2} = 60(\text{km})$
따라서 배의 속력이 12 km/h 이므로 이 배가 레이더 화면에 나타나는 시간은 $\frac{60}{12} = 5$ (시간) 이다.

20. 다음 그림과 같이 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 위의 임의의 점 P와 두 점 A(-3,0), B(0,-4)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은?



- ① $\frac{21}{5}$ ② $\frac{31}{5}$ ③ 7
 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

해설

$\triangle ABP$ 의 넓이가 최소하려면 $\triangle ABP$ 의 높이, 즉 점 P에서 직선 AB에 이르는 거리가 최소이어야 한다.
 이때, $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$
 직선 AB의 방정식은 $y = -\frac{4}{3}x - 4$,
 즉, $4x + 3y + 12 = 0$ 이고, 원의 중심 (1,1)에서 직선 AB에 이르는 거리는
 $\frac{|4 + 3 + 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{19}{5}$ 이므로
 점 P에서 직선 AB에 이르는 거리의 최솟값은
 $\frac{19}{5} - 1 = \frac{14}{5}$
 따라서, $\triangle ABP$ 의 넓이의 최솟값은
 $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{14}{5} = 7$