1. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

2. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x+3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만날 때, r 의 범위는 $a < r < b$ 이다. 이 때, $3a - b$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

두 원이 두 점에서 만나려면 반지름 길이의 합이 중심 사이 거리보다 크고, 반지름 길이의 차가 중심 사이 거리보다 작아야 한다.

$\Rightarrow$ 중심사이 거리는 5,

반지름 길이의 합은 $1 + r$,

반지름 길이 차는 $r - 1$ 이다.

$\therefore \quad r + 1 > 5, \quad r - 1 < 5$

$\Rightarrow \quad 4 < r < 6$

$\therefore \quad 3a - b = 6$

3. 원 $x^2+y^2+2y=0$과 직선 $y=mx-3$이 만나지 않을 때, 상수 m 의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$　② $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

③ $-1<m<1$　④ $-2<m<2$

⑤ $-3<m<3$

해설

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y=0 & \cdots ㉠ \\ y=mx-3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$(m^2+1)x^2-4mx+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-3(m^2+1)=m^2-3$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}=m^2-3<0$

$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

해설

㉠, ㉡을 변형하면

각각 $x^2+(y+1)^2=1, mx-y-3=0$

이 때, 원의 중심 $(0,-1)$ 에서

직선 $y=mx-3$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$$d=\frac{|1-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$$

원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}>1$ 이어야 하므로

$\sqrt{m^2+1}<2, m^2<3$

$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

4. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이때, $d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

5. 중심이 C(1, 2) 이고, 직선 L : $x+2y=0$ 에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2+(y-2)^2=5$
② $(x-1)^2+(y-2)^2=6$
③ $(x-1)^2+(y-2)^2=7$
④ $(x-1)^2+(y-2)^2=8$
⑤ $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

해설

중심에서 접선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로
반지름은 $\dfrac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$
$\therefore$ 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

6. 원 $x^2+y^2+10x-8y+16=0$ 에 의하여 잘려지는 x축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y=0$ 이므로

$x^2+10x+16=0 \Rightarrow (x+2)(x+8)=0$

$\Rightarrow x=-2, -8$

$\therefore x$ 축 위의 교점 : $(-8, 0), (-2, 0)$

$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

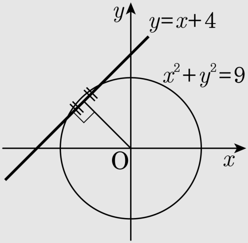
7. 직선 $y=x+4$가 원 $x^2+y^2=9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

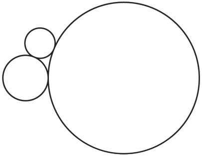
원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x-y+4=0$ 이므로 $\dfrac{|4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=2$

8. 반지름이 각각 2, 3, 10 인 세 원이 그림과 같이 둘 씩 서로 외접하고 있다. 이 때, 세 접점을 지나는 원의 넓이를 구하면?



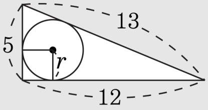
① $\frac{8}{3}\pi$　② 4π　③ $\frac{9}{2}\pi$

④ 6π　⑤ $\frac{20}{3}\pi$

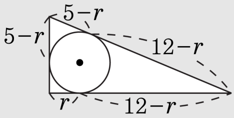
해설

중심사이거리가 각각 12, 5, 13 이다. 세 원의 중심을 이은 삼각형은 $12^2 + 5^2 = 13^2$ 이므로 직각삼각형이다.

$\therefore$ 세 점을 지나는 원은 직각삼각형의 내접원이다.



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $(5 - r) + (12 - r) = 13$

$\Rightarrow$ $r = 2$

$\therefore$ 원의 넓이는 $\pi \times 2^2 = 4\pi$

9. 점 O 를 지나는 직선이 좌표평면 위의 원 C 와 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$ 의 값이 일정함을 다음과 같이 증명하였다.
㉮, ㉯, ㉰에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

원점 O을 지나는 직선의 방정식을
$y = mx \cdots\cdots$ ㉠
원 C의 방정식을 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$
$(a > \mathrm{O}, r > \mathrm{O}) \cdots\cdots$ ㉡ 라 하자
㉠, ㉡에서 $(1+m^2)x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉢ 의 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha\beta =$ (㉮)
따라서 $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} =$ (㉯) $\cdot\, |\alpha\beta| =$ (㉰)
그러므로 m에 관계없이 $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$의 값은 일정하다.

① $\dfrac{a^2 - r^2}{1 - m^2}$, $1 - m^2$, $|a^2 - r^2|$
② $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $1 + m^2$, $|a^2 - r^2|$
③ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 - m^2}$, $2(1 - m^2)$, $2|a^2 - r^2|$
④ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $2(1 + m^2)$, $2|a^2 - r^2|$
⑤ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $r(1 + m^2)$, $r|a^2 - r^2|$

해설

㉢에서 근과 계수와의 관계에서

$$\alpha\beta = \frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$$

$\mathrm{A}(\alpha, m\alpha),\ \mathrm{B}(\beta, m\beta)$ 이므로
$\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{\alpha^2 + (m\alpha)^2} \cdot \sqrt{\beta^2 + (m\beta)^2}$
$= (1 + m^2)|\alpha\beta| = |a^2 - r^2|$