

1. $x = 1998, y = 4331$ 일 때, $\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi} \\ &= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)} \\ &= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{(y-xi)(x+yi)} = 0 \end{aligned}$$

2. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 의 모든 실근의 곱은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 치환하면
 $t^2 + 3t - 10 = 0, (t + 5)(t - 2) = 0$
 $\therefore t = -5$ 또는 $t = 2$
 $\therefore x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

3. 다음 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (\text{}x^2 + \text{}x + \text{}) = x + 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\text{}x^2 + \text{}x + \text{} = A$ 라 하면
 $(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div A = x + 2$
 $\therefore A = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$
 $\therefore A = x^2 + 2x - 1$ 이므로
안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1 이다.

4. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144 ② 196 ③ 288 ④ 308 ⑤ 496

해설

세 모서리를 x, y, z 라 하면

$$x + y + z = 22 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 14 \cdots \cdots \textcircled{2} \text{이고}$$

겉넓이는 $2(xy + yz + zx)$ 이다.

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 22^2 = 14^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore 2(xy + yz + zx) = 288$$

5. 상수 a, b 에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, $2a + b$ 의 값은?

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

- ① 2
- ② 3
- ③ 5
- ④ 7
- ⑤ 9

해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모) $\neq 0$ 이어야 한다.
양변에 공통분모인 $(x-1)(x+3)$ 을 곱하면,
 $a(x+3) + b(x-1) = 6(x+1)$
 $(a+b)x + (3a-b) = 6x+6$
 $\therefore a+b=6, 3a-b=6$
두 식을 연립하여 풀면,
 $a=3, b=6-a=3$
 $\therefore 2a+b=2\times 3+3=9$

6. 실수 x, y 가 방정식 $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 13 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값과 최솟값을 구하면 ?
- ① 최댓값 1, 최솟값 -3 ② 최댓값 3, 최솟값 -1
③ 최댓값 3, 최솟값 1 ④ 최댓값 -1 , 최솟값 -3
⑤ 최댓값 4, 최솟값 -1

해설

x 에 관해 내림차순으로 정리하면
 $4x^2 - 16x + y^2 + 2y + 13 = 0$
실수의 해를 가지므로
 $\frac{D}{4} = (-8)^2 - 4(y^2 + 2y + 13) \geq 0$
 $\therefore y^2 + 2y - 3 \leq 0$
 $\therefore (y + 3)(y - 1) \leq 0$
 $\therefore -3 \leq y \leq 1$
따라서, 최댓값은 1, 최솟값은 -3

7. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 $a + b$ 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이므로 복소수의 켤레근인 $1 - 2i$ 도 근이다. 또 다른 근은 α 라 하자.

$$(1 + 2i)(1 - 2i)\alpha = 5, 5\alpha = 5$$

$$\alpha = 1$$

$$-a = (1 + 2i) + (1 - 2i) + 1 = 3$$

$$a = -3$$

$$b = (1 + 2i)(1 - 2i) + (1 - 2i) + (1 + 2i) = 7$$

$$\therefore a + b = 4$$

8. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x) + g(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 으로 나누면 나머지가 9, $f(x) - g(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누면 나머지가 -3이다. 이 때, $f(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f(x) + g(x) = (x^2 + x + 1)Q_1(x) + 9 \dots\dots\dots \textcircled{A}$$

$$f(x) - g(x) = (x^2 + x + 1)Q_2(x) - 3 \dots\dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} + \textcircled{B}$ 을 하면

$$2f(x) = (x^2 + x + 1) \{Q_1(x) + Q_2(x)\} + 6$$

$$f(x) = (x^2 + x + 1) \frac{Q_1(x) + Q_2(x)}{2} + 3$$

$\therefore$ 나머지는 3

9. α, β 를 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ (단, $ac \neq 0$)의 두 근이라 할 때,
다음 중 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 을 두 근으로 가지는 이차방정식은?

① $a^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + c^2 = 0$

② $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x - c^2 = 0$

③ $c^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + a^2 = 0$

④ $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

⑤ $c^2x^2 + (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

해설

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

따라서, 구하는 이차방정식은

$$x^2 - \frac{(b^2 - 2ac)}{c^2}x + \frac{a^2}{c^2} = 0$$

$$\text{즉, } c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$$

10. a, b, c 는 실수이고, $a > 0, ac - b^2 > 0, b \neq 0$ 이라 할 때, x 의 이차방정식 $x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① 서로 다른 두 개의 음의 근 ② 서로 다른 두 개의 양의 근
③ 양의 중근 ④ 음의 중근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = (a + c)^2 - 4(ac - b^2)$
 $= (a - c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots \textcircled{1} (\because b \neq 0)$
 $a > 0, ac > b^2 > 0$ 에서 $c > 0$ 이므로
(두 근의 곱) $= ac - b^2 > 0 \cdots \textcircled{2}$
(두 근의 합) $= a + c > 0 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.

11. 사차방정식 $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ 을 만족하는 실수 x 에 대하여 $x + \frac{1}{x} = a$ 라 하자. 이 때, a 가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = a$ 로 치환하면

$$x^2 - a - 6 = 0, (a - 3)(a + 2) = 0$$

$\therefore a = 3$ 또는 $a = -2$

따라서, 모든 A 의 값의 합은 $3 + (-2) = 1$

12. 10차 다항식 $P(x)$ 가 $P(k) = \frac{k}{k+1}$ (단, $k = 0, 1, 2, \dots, 10$)을 만족

시킬 때, $P(11)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

해설

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k) - k = 0$$

$$f(x) = (x+1)P(x) - x \text{라 하면}$$

$$f(x) \text{는 } f(0) = f(1) = f(2) = \dots$$

$$= f(10) = 0 \text{인 다항식이다.}$$

$$\therefore f(x) = ax(x-1)(x-2)\dots(x-10)$$

$$\text{또, } f(-1) = 1 = a(-1)(-2)\dots(-11)$$

$$= -a \cdot 11! (\text{단, } 11! = 1 \times 2 \times \dots \times 11)$$

$$\therefore a = -\frac{1}{11!}$$

$$f(11) = 12P(11) - 11$$

$$= -\frac{1}{11!} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1 = -1$$

$$\therefore P(11) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

13. x^2 의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C 가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 이차식 A 는?

- ㉠ A, B 의 최대공약수는 $x+1$ 이다.

㉡ B, C 의 최대공약수는 $x-2$ 이다.

㉢ A, C 의 최소공배수는 x^3+2x^2-5x-6 이다.

- ㉠ x^2+4x+3

㉡ x^2-x-2

㉢ x^2+x-6

㉣ x^2+5x+6

㉤ x^2+2x-3

해설

A, B 의 최대공약수는 $x+1$ 이므로
 $A=a(x+1), B=b(x+1)$
 B, C 의 최대공약수는 $x-2$ 이므로
 $B=(x-2)(x+1), C=c(x-2)$
 A, C 의 최소공배수는
 $x^3+2x^2-5x-6=(x+3)(x-2)(x+1)$
따라서 A, C 의 최대공약수는 $(x+3)$ 이고
 $A=(x+3)(x+1)=x^2+4x+3$

14. a, b 가 정수이고, $P(x) = x^2 + ax + b$ 라 한다. x 의 다항식 $P(x)$ 가 $x^4 + 6x^2 + 25, 3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ 의 공약수일 때, $P(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$x^4 + 6x^2 + 25 = P(x)A(x) \cdots \textcircled{1}$$

$$3x^4 + 4x^2 + 28x + 5 = P(x)B(x) \cdots \textcircled{2} \text{라 하고,}$$

$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2}$ 하면

$$P(x)\{3A(x) - B(x)\} = 14x^2 - 28x + 70$$

$$= 14(x^2 - 2x + 5)$$

그런데 $P(x) = x^2 + ax + b$ 이므로

$$P(x) = x^2 - 2x + 5 \therefore P(3) = 8$$

15. 방정식 $x^{11} = 1$ 의 10개의 허근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{10}$ 이라 할 때, $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1)$ 의 값은?

① 1 ② -1 ③ i ④ $-i$ ⑤ 10

해설

$x^{11} - 1 = (x - 1)(x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1)$ 이므로 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$ 은 방정식 $x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = 0$ 의 10개의 근이다.

$\therefore x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로

$x = -1$ 을 대입하면 $1 - 1 + 1 - \cdots - 1 + 1 = (-1 - \alpha_1)(-1 - \alpha_2) \cdots (-1 - \alpha_{10})$

$\therefore (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1) = 1$