1. $x=1998$, $y=4331$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi}+\dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ i　　⑤ $-i$

해설

$$\frac{x+yi}{y-xi}+\frac{y-xi}{x+yi}$$
$$=\frac{(x+yi)^2+(y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$$
$$=\frac{x^2+2xyi-y^2+y^2-2xyi-x^2}{(y-xi)(x+yi)}=0$$

2. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서

$x^2 = t$로 치환하면

$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$

$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$

따라서 모든 실근의 곱은

$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

3. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2)\div(\square x^2+\square x+\square)=x+2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\square x^2+\square x+\square=A$라 하면

$(x^3+4x^2+3x-2)\div A=x+2$

$\therefore\ A=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)$

$\therefore\ A=x^2+2x-1$이므로

$\square$안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1이다.

4. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144　② 196　③ 288　④ 308　⑤ 496

해설

세 모서리를 x, y, z라 하면

$x+y+z=22 \cdots\cdots$ ①

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=14 \cdots\cdots$ ②이고

겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이다.

①, ② 에서 $22^2=14^2+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=288$

5. 상수 a, b에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, $2a+b$의 값은?

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}=\frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모) $\neq 0$이어야 한다.

양변에 공통분모인 $(x-1)(x+3)$을 곱하면,

$a(x+3)+b(x-1)=6(x+1)$

$(a+b)x+(3a-b)=6x+6$

$\therefore\ a+b=6,\ 3a-b=6$

두 식을 연립하여 풀면,

$a=3,\ b=6-a=3$

$\therefore\ 2a+b=2\times3+3=9$

6. 실수 x, y 가 방정식 $4x^2+y^2-16x+2y+13=0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값과 최솟값을 구하면 ?

① 최댓값 1, 최솟값 -3
② 최댓값 3, 최솟값 -1
③ 최댓값 3, 최솟값 1
④ 최댓값 -1, 최솟값 -3
⑤ 최댓값 4, 최솟값 -1

해설

x에 관해 내림차순으로 정리하면

$4x^2-16x+y^2+2y+13=0$

실수의 해를 가지므로

$$\frac{D}{4}=(-8)^2-4(y^2+2y+13)\geq 0$$

$\therefore\ y^2+2y-3\leq 0$

$\therefore\ (y+3)(y-1)\leq 0$

$\therefore\ -3\leq y\leq 1$

따라서, 최댓값은 1, 최솟값은 -3

7. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 $a + b$ 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이므로 복소수의 켤레근인 $1 - 2i$ 도 근이다. 또 다른 근은 α 라 하자.

$(1 + 2i)(1 - 2i)\alpha = 5$, $5\alpha = 5$

$\alpha = 1$

$-a = (1 + 2i) + (1 - 2i) + 1 = 3$

$a = -3$

$b = (1 + 2i)(1 - 2i) + (1 - 2i) + (1 + 2i) = 7$

$\therefore\ a + b = 4$

8. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 x^2+x+1 으로 나누면 나머지가 9, $f(x)-g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누면 나머지가 -3 이다. 이 때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x)+g(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+9 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f(x)-g(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)-3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠ + ㉡을 하면

$2f(x)=(x^2+x+1)\left\{Q_1(x)+Q_2(x)\right\}+6$

$$f(x)=(x^2+x+1)\frac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$$

$\therefore$ 나머지는 3

9. α, β를 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$(단, $ac \neq 0$)의 두 근이라 할 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$을 두 근으로 가지는 이차방정식은?

① $a^2x^2+(b^2-4ac)x+c^2=0$

② $a^2x^2-(b^2-2ac)x-c^2=0$

③ $c^2x^2+(b^2-4ac)x+a^2=0$

④ $c^2x^2-(b^2-2ac)x+a^2=0$

⑤ $c^2x^2+(b^2-2ac)x+a^2=0$

해설

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\beta}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{b^2-2ac^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\beta}\right)^2=\frac{1}{(\alpha\beta)^2}=\frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{a^2}{c^2}$$

따라서, 구하는 이차방정식은

$$x^2-\frac{(b^2-2ac)}{c^2}x+\frac{a^2}{c^2}=0$$

즉, $c^2x^2-(b^2-2ac)x+a^2=0$

10. a, b, c는 실수이고, $a > 0, ac - b^2 > 0, b \neq 0$이라 할 때, x의 이차방정식 $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 서로 다른 두 개의 음의 근
② 서로 다른 두 개의 양의 근
③ 양의 중근
④ 음의 중근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2)$

$= (a-c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots$ ㉠ $(\because\ b \neq 0)$

$a > 0,\ ac > b^2 > 0$에서 $c > 0$이므로

(두 근의 곱)$= ac - b^2 > 0 \cdots$ ㉡

(두 근의 합)$= a + c > 0 \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.

11. 사차방정식 $x^4-x^3-4x^2-x+1=0$을 만족하는 실수 x에 대하여 $x+\dfrac{1}{x}=a$라 하자. 이 때, a가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4-x^3-4x^2-x+1=0$의 양변을

x^2으로 나누면

$$x^2-x-4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=a$로 치환하면

$x^2-a-6=0,\ (a-3)(a+2)=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=-2$

따라서, 모든 A의 값의 합은 $3+(-2)=1$

12. 10차 다항식 $P(x)$가 $P(k) = \frac{k}{k+1}$(단, $k = 0, 1, 2, \cdots, 10$)을 만족시킬 때, $P(11)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

해설

$P(k) = \frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k) - k = 0$

$f(x) = (x+1)P(x) - x$라 하면

$f(x)$는 $f(0) = f(1) = f(2) = \cdots$

$= f(10) = 0$인 다항식이다.

$\therefore\ f(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$

또, $f(-1) = 1 = a(-1)(-2)\cdots(-11)$

$= -a \cdot 11!$(단, $11! = 1 \times 2 \times \cdots \times 11$)

$\therefore\ a = -\frac{1}{11!}$

$f(11) = 12P(11) - 11$

$= -\frac{1}{11!} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot 1 = -1$

$\therefore\ P(11) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

13. x^2의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 이차식 A는?

㉠ A, B의 최대공약수는 $x+1$이다. ㉡ B, C의 최대공약수는 $x-2$이다. ㉢ A, C의 최소공배수는 x^3+2x^2-5x-6이다.

① x^2+4x+3 ② x^2-x-2 ③ x^2+x-6
④ x^2+5x+6 ⑤ x^2+2x-3

해설

A, B의 최대공약수는 $x+1$ 이므로
$A=a(x+1)$, $B=b(x+1)$
B, C의 최대공약수는 $x-2$ 이므로
$B=(x-2)(x+1)$, $C=c(x-2)$
A, C의 최소공배수는
$x^3+2x^2-5x-6=(x+3)(x-2)(x+1)$
따라서 A, C의 최대공약수는 $(x+3)$ 이고
$A=(x+3)(x+1)=x^2+4x+3$

14. a, b가 정수이고, $P(x) = x^2 + ax + b$라 한다. x의 다항식 $P(x)$가 $x^4 + 6x^2 + 25$, $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$의 공약수일 때, $P(3)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 8

해설

$x^4 + 6x^2 + 25 = P(x)A(x) \ \cdots$ ①

$3x^4 + 4x^2 + 28x + 5 = P(x)B(x) \ \cdots$ ②라 하고,

① $\times 3 -$ ② 하면

$P(x)\{3A(x) - B(x)\} = 14x^2 - 28x + 70$

$= 14(x^2 - 2x + 5)$

그런데 $P(x) = x^2 + ax + b$ 이므로

$P(x) = x^2 - 2x + 5 \quad \therefore \ P(3) = 8$

15. 방정식 $x^{11}=1$ 의 10개의 허근을 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{10}$ 이라 할 때, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_{10}+1)$ 의 값은?

① 1 ② -1 ③ i ④ $-i$ ⑤ 10

해설

$x^{11}-1=(x-1)(x^{10}+x^9+\cdots+x+1)$ 이므로 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{10}$ 은 방정식 $x^{10}+x^9+\cdots+x+1=0$ 의 10개의 근이다.

$\therefore\ x^{10}+x^9+\cdots+x+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로

$x=-1$ 을 대입하면 $1-1+1-\cdots-1+1=(-1-\alpha_1)(-1-\alpha_2)\cdots(-1-\alpha_{10})$

$\therefore (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_{10}+1)=1$