1. 이차부등식 $x^2 + 2x - 35 < 0$을 풀면?

① $-15 < x < 12$ ② $-15 < x < 5$ ③ $-7 < x < 5$
④ $-7 < x < 2$ ⑤ $-5 < x < 7$

해설

$x^2 + 2x - 35 < 0$에서 $(x+7)(x-5) < 0$
$\therefore -7 < x < 5$

2. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-4x-5 \le 0 \\ 2x^2-5x<3 \end{cases}$ 의 해 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$x^2-4x-5 \le 0 \iff (x+1)(x-5) \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ㉠

$2x^2-5x<3 \iff 2x^2-5x-3<0$

$\iff (2x+1)(x-3)<0$

$\therefore -\frac{1}{2} < x < 3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-\frac{1}{2} < x < 3$

따라서, 정수인 것은 0, 1, 2로 3 개다.

3. 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $2<x<3$일 때, $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$2<x<3$ 가 해이므로
$(x-2)(x-3)<0$
$x^2-5x+6<0$, $a=-5, b=6$
$\therefore\ a+b=1$

4. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$　② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$　③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$　⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2 + 7x - 10 \geq 0$

$x^2 - 7x + 10 \leq 0$

$(x-2)(x-5) \leq 0$

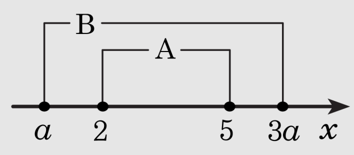
$2 \leq x \leq 5$

$x^2 - 4ax + 3a^2 \leq 0$

$(x-a)(x-3a) \leq 0$

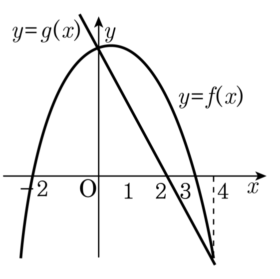
$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$

㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

5. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해를 구하면?



① $-2 < x < 4$ ② $-2 < x < 3$
③ $0 < x < 4$ ④ $2 < x < 3$
⑤ $3 < x < 4$

해설

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는
함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = g(x)$ 보다
위쪽에 있는 x 의 구간을 의미하므로
구하는 해는 $0 < x < 4$

6. x에 관한 이차부등식 $ax^2 - 2ax - 3a \ge bx^2 - 2bx - 3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a < b$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

② $a < b$일 때, $x \le -1,\ x \le 3$이다.

③ $a < 0$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

④ $b < 0$일 때, $x \le -1,\ x \ge 3$이다.

⑤ $a \ge b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2 - 2ax - 3a \ge bx^2 - 2bx - 3b$을 이항하여 정리하면
$(a-b)x^2 - 2(a-b)x - 3(a-b) \ge 0$(이차부등식이므로 $a \ne b$)

i) $a < b$이면 $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \le 0$
$\therefore -1 \le x \le 3$

ii) $a > b$이면
$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \ge 0$
$\therefore x \le -1,\ x \ge 3$

7. 이차부등식 $[x]^2 + [x] - 12 \le 0$의 해가 $a \le x < b$일 때, $a + b$의 값은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$[x]^2 + [x] - 12 \le 0$에서

$([x] + 4)([x] - 3) \le 0$

$\therefore -4 \le [x] \le 3$

$x = -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$\therefore -4 \le x < 4$

따라서 $a = -4,\ b = 4$이므로 $a + b = 0$이다

8. 모든 실수 x에 대해 이차부등식$x^2-x(kx-3)+3>0$이 항상 성립하기 위한 정수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면

$(1-k)x^2+3x+3>0$

$D=3^2-4\times(1-k)\times3<0$

$\therefore k<\dfrac{3}{12}=0.25$

최대 정수 $k=0$

9. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라 하면 $\alpha+\beta=10$
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$로 놓으면
$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$
$x=\dfrac{3+\alpha}{4},\ \ \dfrac{3+\beta}{4}$
$\therefore$ 두 근의 합은 $\dfrac{6+\alpha+\beta}{4}=4$

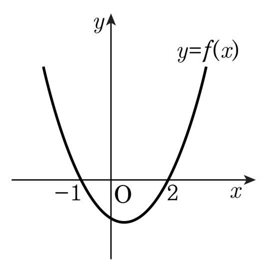
10. 어부 김씨는 둘레 길이가 $28\,\mathrm{cm}$ 인 직사각형 모양의 양식장의 넓이를 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이 도도록 지으려고 한다. 이 때 양식장의 한 변의 길이를 최대 얼마로 해야 하는가?

① $5\,\mathrm{m}$　② $6\,\mathrm{m}$　③ $7\,\mathrm{m}$　④ $8\,\mathrm{m}$　⑤ $9\,\mathrm{m}$

해설

양식장의 가로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$ 라고 하면
둘레의 길이는 $28\,\mathrm{m}$ 이므로
세로의 길이는 $(14-x)\,\mathrm{m}$ 이다.
양식장의 넓이가 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이므로
$x(14-x) \ge 48,\ 14x - x^2 - 48 \ge 0$
$x^2 - 14x + 48 \le 0, (x-6)(x-8) \le 0$
$\therefore 6 \le x \le 8$
따라서 한 변의 길이를 최대 $8\,\mathrm{m}$ 로 해야 한다.

11. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식
$f(x-2005) \le 0$ 의 해는?



① $1999 \le x \le 2002$

② $2000 \le x \le 2003$

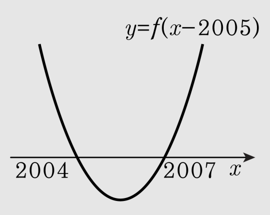
③ $2001 \le x \le 2004$

④ $2002 \le x \le 2004$

⑤ $2004 \le x \le 2007$

해설

함수 $y = f(x-2005)$ 의 그래프는
$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로
2005만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y = f(x-2005)$ 의 그래프는
다음 그림과 같으므로 부등식
$y = f(x-2005) \le 0$ 의 해는
$2004 \le x \le 2007$



12. 좌표 평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1　② 2　③ 3　④ 0　⑤ -1

해설

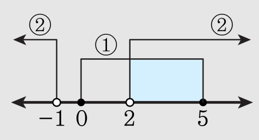
임의의 실수 x 에 대하여 부등식
$2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠ 이
항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0 \cdots$ ㉡ 식이
항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

13. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설



첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x - 5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.

14. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ cx+y=3 \end{cases}$ 의 해 $(x,\ y)$가 제1사분면에 있을 상수 c의 조건은?

① $c=-1$　② $c>-1$　③ $c<\frac{3}{2}$
④ $0<c<\frac{3}{2}$　⑤ $-1<c<\frac{3}{2}$

해설

$\begin{cases} x-y=2 \\ cx+y=3 \end{cases}$ 을 풀면 $x=\frac{5}{c+1}, y=\frac{3-2c}{c+1}$
$x>0, y>0$ 인 c의 범위를 구한다.
$c+1>0,\ \ 3-2c>0$
$\therefore\ -1<c<\frac{3}{2}$

15. 다음 부등식 ㉠과 부등식 ㉡의 해가 일치할 때, a, b의 값을 구하면?

$x^2 - 2x - 3 < 3|x - 1| \cdots$ ㉠
$ax^2 + 2x + b > 0 \cdots$ ㉡

① $a = -1,\ b = 15$
② $a = -2,\ b = 14$
③ $a = -3,\ b = 13$
④ $a = -4,\ b = 12$
⑤ $a = -5,\ b = 10$

해설

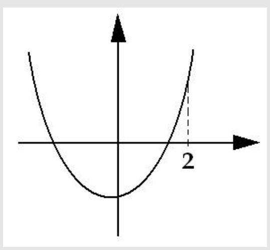
㉠ 부등식에서 $x \geq 1$ 일 때 $x^2 - 2x - 3 < 3x - 3$
$\therefore x^2 - 5x < 0$ 이므로 $0 < x < 5$
$\therefore 1 \leq x < 5 \cdots$ ㉠
$x < 1$ 일 때 $x^2 - 2x - 3 < -3x + 3$
$x^2 + x - 6 < 0$ 이므로 $(x - 2)(x + 3) < 0$
$\therefore -3 < x < 2$ 따라서 $-3 < x < 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $-3 < x < 5$
$\therefore a(x + 3)(x - 5) < 0$
$\therefore a(x^2 - 2x - 15) < 0$
$ax^2 + 2x + b > 0$ 와 일치해야 하므로
$a = -1,\ b = 15$

16. $x > 2$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$을 성립하게 하는 실수 k의 최댓값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k < 2$ ……㉠

$f(2) = 3 - 3k \geq 0$에서 $k \leq 1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $k \leq 1$

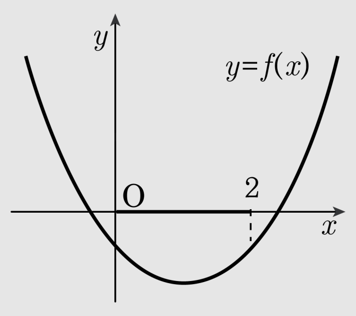
k의 최댓값은 1이다.

17. $0 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이 항상 성립되게 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ −1

해설

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 로 놓을 때
주어진 부등식의 해가 0, 2 를 포함 하려면
$f(0) \le 0,\ f(2) \le 0$ 이어야 한다.



$f(0) = a^2 - 4 \le 0$
$\therefore\ -2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠
$f(2) = -2a + a^2 \le 0$
$\therefore\ 0 \le a \le 2 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위는 $0 \le a \le 2$
따라서 $M = 2,\ m = 0$ 이므로 $M - m = 2$

18. 두 부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$, $|x| < |a|$의 해가 같을 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$|x| < |a|$ 에서 양변을 제곱하면
$x^2 < a^2$ 이므로
$x^2 - a^2 < 0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠의 양변에 $a(a < 0)$ 를 곱하면
$ax^2 - a^3 > 0$ 이고
이것이 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 과
일치해야 하므로
$a^2 - 1 = 0, b = -a^3$
$\therefore a = -1,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = 0$

19. 이차방정식 $ax^2-(a-3)x+a-2=0$이 적어도 한 개의 정수근을 갖도록 하는 정수 a값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

이차방정식이므로 $a \neq 0$이고
실근을 가지므로
$D=(a-3)^2-4a(a-2) \geq 0$
$3a^2-2a-9 \leq 0$
$\therefore \ \dfrac{1-\sqrt{28}}{3} \leq a \leq \dfrac{1+\sqrt{28}}{3}$
$-1.\times\times\cdots \leq a \leq 2.\times\times\cdots$ 이므로
a의 정수값은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$
그런데 $a \neq 0$이고 $a=1$일 때는 정수근이 없다.
$\therefore \ a=-1,\ 2$이고 구하는 합은 1

20. x에 대한 방정식 $x^2-2kx+(2k^2-3k)=0$의 두 실근을 α,β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2 \le 8$를 만족하는 k의 최댓값과 최솟값을 각각 M,m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2-2kx+(2k^2-3k)=0$의 두 실근을
α,β라 하면
$\frac{D}{4}=k^2-(2k^2-3k)\ge 0$
$\therefore\ 0\le k\le 3\cdots$①
또, $\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=2k^2-k$이므로
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\le 8$
$(2k)^2-4(2k^2-3k)\le 8$
$k^2-3k+2\ge 0 \quad (k-1)(k-2)\ge 0$
$\therefore\ k\le 1,\quad k\ge 2\cdots$②
①,②에서 $0\le k\le 1$ 또는 $2\le k\le 3$
$\therefore\ M=3,\quad m=0$
$\therefore\ M+m=3$