

1. $x = -2$ 일 때, 최댓값 3을 가지고, 점 $(0, -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 3$

② $y = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 3$

③ $y = -\frac{2}{3}(x-2)^2 + 3$

④ $y = -\frac{2}{3}(x+2)^2 + 3$

⑤ $y = -2x^2 + 3$

해설

$x = -2$ 일 때, 최댓값 3을 가진다는 것은 그래프가 위로 볼록하고, $y = a(x+2)^2 + 3$ 의 형태임을 의미한다.

이 중 $(0, -3)$ 을 지나면,

$$-3 = 4a + 3$$

$$4a = -6$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 3$$

2. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11

② 21

③ 25

④ 81

⑤ 100

해설

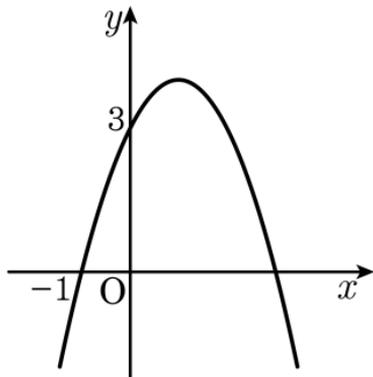
합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

3. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + 2x + c$ 의 그래프이다. 이차함수의 최댓값은?



① $\frac{7}{2}$

② 4

③ $\frac{9}{2}$

④ 5

⑤ $\frac{11}{2}$

해설

$y = ax^2 + 2x + c$ 에 점 $(-1, 0)$, $(0, 3)$ 을 대입하면

$$0 = a - 2 + c$$

$$3 = c, a = -1$$

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

$$\therefore y = -(x-1)^2 + 4$$

따라서 최댓값은 4 이다.

4. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + k + 2$ 의 최댓값이 0 일 때, k 의 값은?

① -5

② -3

③ 0

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 7

해설

$$y = -3x^2 + 6x + k + 2 = -3(x - 1)^2 + k + 5$$

$x = 1$ 일 때, 최댓값이 $k + 5$ 이므로

$$k + 5 = 0 \quad \therefore k = -5$$

5. 이차함수 $y = 2x^2 - 4x + 1 + k$ 의 최솟값이 4 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$y = 2x^2 - 4x + 1 + k = 2(x - 1)^2 - 1 + k$$

최솟값이 4 이므로 $-1 + k = 4$

$$\therefore k = 5$$

6. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 $-1, 5$ 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

① 45

② 20

③ -5

④ -20

⑤ -45

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 $-1, 5$ 이므로

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a(x+1)(x-5)$$

$$= a(x^2 - 4x - 5)$$

$$= a(x-2)^2 - 9a$$

최댓값이 9 이므로 $-9a = 9$

$$\therefore a = -1$$

따라서 구하는 이차함수는 $y = -x^2 + 4x + 5$ 이고

$b = 4, c = 5$ 이다.

$$\therefore abc = -1 \times 4 \times 5 = -20$$

7. 이차함수 $y = -x^2 + 2ax - 6a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$$y = -x^2 + 2ax + 6a = -(x - a)^2 + a^2 + 6a$$

$$\therefore M = a^2 + 6a = (a + 3)^2 - 9$$

따라서 M 의 최솟값은 -9 이다.

8. 합이 20 인 두 수의 곱이 최대가 될 때, 이 두 수를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 10

▷ 정답: 10

해설

두 수를 각각 x , $20 - x$ 라 하면

$$\begin{aligned}y &= x(20 - x) \\ &= -x^2 + 20x \\ &= -(x - 10)^2 + 100\end{aligned}$$

$x = 10$ 일 때, 최댓값 100을 갖는다.

∴ $x = 10$, $20 - x = 10$

따라서 두 수는 10, 10

9. 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 10 인 직사각형의 최대 넓이는?



① $\frac{25}{4}$

② $\frac{25}{2}$

③ 25

④ 50

⑤ 100

해설

두 변의 길이를 x , $10 - x$, 넓이를 y 라 하면

$$y = x(10 - x)$$

$$= -(x^2 - 10x)$$

$$= -(x^2 - 10x + 25 - 25)$$

$$= -(x - 5)^2 + 25$$

$$\therefore (\text{최대 넓이}) = 25$$

10. 가로 길이가 6cm, 세로 길이가 10cm 인 직사각형에서 가로 길이를 x cm 길게 하고 세로 길이를 x cm 짧게 한 직사각형의 넓이가 최대일 때, x 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 14

⑤ 15

해설

넓이를 y 라 하면

$$y = (6 + x)(10 - x)$$

$$= -x^2 + 4x + 60$$

$$= -(x^2 - 4x + 4 - 4) + 60$$

$$= -(x - 2)^2 + 64$$

따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값 64 를 가진다.

11. 가로, 세로의 길이가 각각 8cm, 6cm 인 직사각형에서 가로의 길이는 x cm 만큼 줄이고, 세로의 길이는 $2x$ cm 만큼 길게 하여 얻은 직사각형의 넓이를 y cm² 라고 할 때, y 를 최대가 되게 하는 x 의 값은?

① $\frac{5}{2}$

② $\frac{15}{2}$

③ $\frac{25}{2}$

④ $\frac{31}{5}$

⑤ $\frac{16}{5}$

해설

줄어든 가로의 길이는 $(8 - x)$ cm ,
 늘어난 세로의 길이는 $(6 + 2x)$ cm 에서

$$\begin{aligned} y &= (8 - x)(6 + 2x) \\ &= 48 + 10x - 2x^2 \\ &= -2 \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} \right) + 48 \\ &= -2 \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{121}{2} \end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{121}{2}$ 을 갖는다.

12. 둘레의 길이가 24 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이를 y 라고 할 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 18

② 20

③ 30

④ 32

⑤ 36

해설

반지름의 길이를 x 라 하면 호의 길이는 $24 - 2x$ 이다.

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2} \times x \times (24 - 2x) \\ &= x(12 - x) \\ &= -x^2 + 12x \\ &= -(x^2 - 12x + 36 - 36) \\ &= -(x - 6)^2 + 36\end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 6$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 36 을 가진다.

13. 둘레의 길이가 24 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답: cm

▷ 정답: 12 cm

해설

반지름 x cm, 호의 길이를 $(24 - 2x)$ cm 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24 - 2x) \\ &= x(12 - x) \\ &= -x^2 + 12x \\ &= -(x^2 - 12x + 36) + 36 \\ &= -(x - 6)^2 + 36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 6 cm 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 36 cm^2 를 가진다.

따라서 호의 길이는 $24 - 2x = 12 \text{ cm}$ 이다.

14. 지상 40m 높이에서 v m/s 의 속도로 똑바로 위로 쏘아올린 공이 t 초 후에 지면으로부터 h m 만큼의 높이가 될 때, $h = vt + 40 - 5t^2$ 의 식이 성립한다. 공이 3 초 후에 최고 높이에 도달했을 때, 이 최고 높이를 구하여라.

▶ 답: m

▷ 정답: 85 m

해설

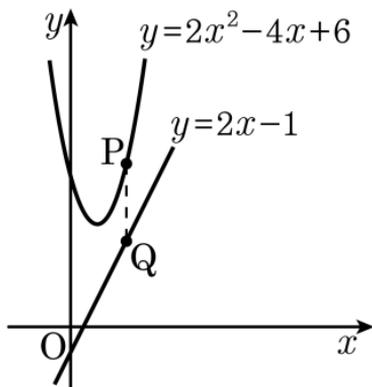
$$h = -5t^2 + vt + 40 = -5 \left(t - \frac{v}{10} \right)^2 + \frac{v^2}{20} + 40$$

이 물체는 $t = \frac{v}{10}$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v^2}{20} + 40$ 에 도달하고, $\frac{v}{10} = 3$

이므로 $v = 30$ 이다.

따라서 최고 높이는 85m 이다.

15. 다음 그림과 같이 $y = 2x^2 - 4x + 6$ 과 $y = 2x - 1$ 이 y 축에 평행인 직선과 만나는 점을 P, Q 라 할 때, \overline{PQ} 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

\overline{PQ} 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이 때, 점 P 의 좌표를 $(t, 2t^2 - 4t + 6)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t, 2t - 1)$ 이다.

$$\overline{PQ} = 2t^2 - 4t + 6 - (2t - 1) = 2t^2 - 6t + 7 = 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

$\therefore t = \frac{3}{2}$ 일 때, \overline{PQ} 의 최솟값은 $\frac{5}{2}$

16. 다음 그림과 같이 20m인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.
넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



- ① 3 m ② 4 m ③ 5 m
④ 6 m ⑤ 7 m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로 길이를 $20 - 2x$ 라고 하면,

$$y = x(20 - 2x)$$

$$= -2x^2 + 20x$$

$$= -2(x - 5)^2 + 50$$

$x = 5$ 일 때, 최댓값은 50 이다.

17. 지상 22m 되는 위치에서 초속 30m 로 위로 던져 올린 공의 t 초 후의 높이를 h m 라 하면 $h = -5t^2 + 30t + 22$ 인 관계가 성립한다. 이 공은 몇 초 후에 최고 높이에 도달하는가?

① 1 초

② 2 초

③ 3 초

④ 4 초

⑤ 5 초

해설

$$\begin{aligned}h &= -5(t^2 - 6t + 9 - 9) + 22 \\ &= -5(t - 3)^2 + 67\end{aligned}$$

$t = 3$ 일 때, 최댓값 $h = 67$

18. 함수 $f(x) = \frac{3}{\sqrt{ax^2 - 3x + a - 2}}$ 이 최댓값을 가질 때, 정수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

분모가 항상 양수이므로 주어진 함수가 최대가 될 때는 함수 $y = ax^2 - 3x + a - 2 \cdots \textcircled{A}$ 이 최솟값을 가질 때이다.

만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함수값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.

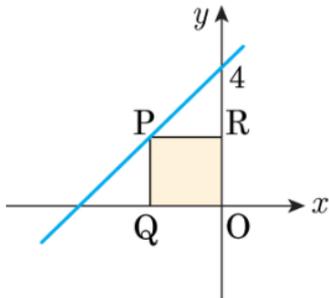
따라서 $a > 0 \cdots \textcircled{B}$

$D = -4a^2 + 8a + 9 < 0 \cdots \textcircled{C}$ 의 두 식이 모두 만족되면, \textcircled{A} 이 양의 최솟값을 갖는다.

$$-4a^2 + 8a + 9 < 0 \text{ 에서 } a < \frac{2 - \sqrt{13}}{2}, a > \frac{2 + \sqrt{13}}{2}$$

따라서 \textcircled{B} 과의 공통 범위를 구하면 $a > \frac{2 + \sqrt{13}}{2} = 2.80$ 이므로 $a = 3$ 이다.

19. 다음 그림과 같이 직선이 $y = x + 4$ 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발이 각각 Q, R 이고 직사각형 PQOR 의 넓이를 S 라 한다. S 가 최대가 될 때 점 P 의 좌표는?



① (2, 1)

② (2, 4)

③ (-2, 2)

④ (-2, -4)

⑤ (4, 2)

해설

점 P 의 좌표는 $(a, a + 4)$ 이고 넓이는 S 이므로

$$S = a(a + 4) = (a^2 + 4a + 4) - 4 = (a + 2)^2 - 4$$

$$\therefore P(-2, -2 + 4) = P(-2, 2)$$