

1. 세 변의 길이가 $x-1$, x , $x+1$ 인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x 의 값의 범위가 $a < x < b$ 라 할 때, 방정식 $ax^2 - 3x + b = 0$ 의 두 근의 곱은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x-1$, x , $x+1$ 은 삼각형의 세 변이므로
 $x-1 > 0$, $x > 0$, $x+1 > 0$, $x-1+x > x+1 \therefore x > 2 \dots\dots ㉠$
한편, 둔각삼각형이 되려면
 $(x-1)^2 + x^2 < (x+1)^2$
 $x^2 - 4x < 0$ 에서 $0 < x < 4 \dots\dots ㉡$
㉠, ㉡에서 $2 < x < 4$
 $\therefore a = 2$, $b = 4$
따라서 $ax^2 - 3x + b = 0$ 의 두 근의 곱은
 $\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$

2. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$ 이 $x < 1$ 에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 범위를 구하면 $a \leq k$ 이다. 이 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$ 라 놓으면

i) 축이 $x < 1$ 에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1, a < 2$

ii) $f(1) > 0, 1 - a + 9 > 0, a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0, a \geq 6, a \leq -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \leq -6$

$\therefore k = -6$

3. 이차방정식 $x^2 - mx + 2 = 0$ 이 2보다 큰 근과 2보다 작은 근을 가질 때 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m > -1$

② $m > 1$

③ $m > -2$

④ $m > 2$

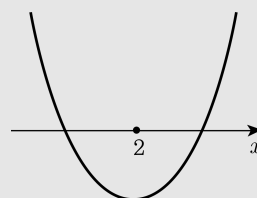
⑤ $m > 3$

해설

주어진 이차방정식의 근이 2보다 크고 2보다

작은 근을 가지면 $f(2) < 0$

$f(2) = 4 - 2m + 2 < 0$ 이므로 $m > 3$



4. 연립방정식
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = k \\ x + y + 2z = 2k^2 \end{cases}$$
의 해 x, y, z 가 모두 양수일 때, k 의

값의 범위는?

- ① $-\frac{3}{2} < k < 0$ ② $1 < k < \frac{3}{2}$ ③ $\frac{1}{2} < k < \frac{3}{4}$
 ④ $-2 < k < -\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2} < k < 1$

해설

$$\text{i) } \begin{cases} 2x + y + z = 1 \cdots \textcircled{1} \\ x + 2y + z = k \cdots \textcircled{2} \\ x + y + 2z = 2k^2 \cdots \textcircled{3} \end{cases} \quad \text{라 하면}$$

$$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} - \textcircled{3} \text{에서}$$

$$4x = -2k^2 - k + 3 \\ = -(2k + 3)(k - 1) > 0 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} \times 3 - \textcircled{3} - \textcircled{1} \text{에서}$$

$$4y = -2k^2 + 3k - 1 \\ = -(2k - 1)(k - 1) > 0 \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{3} \times 3 - \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{에서}$$

$$4z = 6k^2 - k - 1 \\ = (3k + 1)(2k - 1) > 0 \cdots \textcircled{6}$$

$$\text{ii) } \textcircled{4} \text{에서 } -\frac{3}{2} < k < 1$$

$$\textcircled{5} \text{에서 } \frac{1}{2} < k < 1$$

$$\textcircled{6} \text{에서 } k < -\frac{1}{3}, k > \frac{1}{2}$$

$$\text{이들의 공통부분은 } \frac{1}{2} < k < 1$$

5. 두 부등식 $x^2 - x - 2 > 0$, $x^2 - (a - 3)x - 3a < 0$ 를 동시에 만족하는 정수가 -2 뿐일 때, a 의 값의 범위를 구하면 $m < a \leq n$ 이다. mn 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

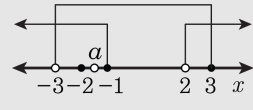
▷ 정답 : -6

해설

$$x^2 - x - 2 > 0 \text{에서 } x < -1, x > 2$$

$$x^2 - (a - 3)x - 3a < 0 \text{에서}$$

$$(x + 3)(x - a) < 0$$



그림에서와 같이 동시에 만족하는 정수값이 -2 뿐이려면 $-2 < a \leq 3$ 이다.

$$\therefore -2 < a \leq 3$$

6. 이차방정식 $x^2 - (p+1)x + 2p - 1 = 0$ 의 두 근이 모두 -2 와 2 사이에 있도록 실수 p 의 값의 범위를 구하면?

- ① $p > 5, p < 1$ ② $-\frac{5}{4} < p < 1$ ③ $-5 < p < 3$
④ $p > 1, p < -1$ ⑤ $p > 5, p < -1$

해설

$f(x) = x^2 - (p+1)x + 2p - 1$ 로 놓으면
(i) 이차방정식이 두 근을 가지므로 $D > 0$ 에서
 $(p+1)^2 - 4(2p-1) > 0$, $p^2 + 2p + 1 - 8p + 4 > 0$
 $p^2 - 6p + 5 > 0$, $(p-5)(p-1) > 0$
 $\therefore p > 5, p < 1$
(ii) $f(-2) > 0$ 에서
 $4 + 2(p+1) + 2p - 1 > 0$
 $4p + 5 > 0$, $4p > -5 \quad \therefore p > -\frac{5}{4}$
(iii) $f(2) > 0$ 에서
 $4 - 2p - 2 + 2p - 1 > 0 \therefore$ 성립
(iv) 대칭축이 -2 와 2 사이에 있어야 하므로
 $-2 < \frac{p+1}{2} < 2 \quad -4 < p+1 < 4$
 $\therefore -5 < p < 3$
따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서
 $\therefore -\frac{5}{4} < p < 1$

7. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + ax + b < 0 \\ x^3 + x \geq 0 \end{cases}$ 의 해가

$0 \leq x < 2$ 이고 실수 a, b 가 $|a| + |b| = 3$ 을 만족할 때, a, b 의 값에 대하여 $2a + b$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$x^3 + x = x(x^2 + 1) \geq 0 \text{ 에서}$$

$$x^2 + 1 > 0 \text{ 이므로 } x \geq 0$$

$$\text{따라서 연립부등식 } \begin{cases} x^2 + ax + b < 0 \cdots \textcircled{1} \\ x \geq 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \text{ 의 해가}$$

$0 \leq x < 2$ 이기 위해서는 부등식 ①의 해가

$a < x < 2(a < 0)$ 이어야 한다.

$$\text{따라서, } x^2 + ax + b = (x - a)(x - 2) = x^2 - (a + 2)x + 2a$$

$$\therefore \begin{cases} a = -a - 2 \\ b = 2a \end{cases} \cdots \textcircled{3}$$

$|a| + |b| = 3$ 이므로,

$$|-a - 2| + |2a| = 3$$

i) $a < -2$ 일 때,

$$-a - 2 - 2a = 3$$

$$\therefore a = -\frac{5}{3}$$

그러나 $a < -2$ 이므로 부적당

ii) $-2 \leq a < 0$ 일 때,

$$a + 2 - 2a = 3$$

$$\therefore a = -1$$

$$\textcircled{3} \text{ 에서 } a = -1, b = -2$$

$$\therefore 2a + b = -4$$

8. 두 부등식 $x^2 - 15x + 36 < 0$, $|8 - x| \geq a$ 을 만족하는 정수의 개수가 3개일 때, a 의 값의 범위를 구하면?

① $1 \leq a \leq 2$

② $2 \leq a < 3$

③ $3 \leq a < 4$

④ $2 < a \leq 3$

⑤ $3 < a \leq 4$

해설

$x^2 - 15x + 36 < 0$ 에서
 $(x - 3)(x - 12) < 0$ 이므로 $3 < x < 12$
 $|8 - x| \geq a$ 에서
 $8 - x \geq a$ 또는 $8 - x \leq -a$
 $\therefore x \leq 8 - a, x \geq 8 + a$
공통부분의 정수의 개수가 3개이므로
 $3 < x \leq 8 - a$ 에서 2개
 $8 + a \leq x < 12$ 에서 1개
 $\left(\therefore \frac{8 - a + 8 + a}{2} > \frac{3 + 12}{2} \right)$
 $\therefore 5 \leq 8 - a < 6, 10 < 8 + a \leq 11$
 $\therefore -3 \leq -a < -2, 2 < a \leq 3$
 $\therefore 2 < a \leq 3$