

1. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 의 근 중에서 최대의 근은?

① -2

② -1

③ 0

④ 6

⑤ 2

해설

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 에서
 $x = 1, x = -1$ 을 대입하면 성립하므로
 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
 $= (x-1)(x+1)(x^2+x-6)$
 $= (x-1)(x+1)(x+3)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -3, -1, 1, 2$
따라서 최대의 근은 2

2. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 가 두 직선 $y = -2x + 1$, $y = 4x - 2$ 에 동시에 접할 때, 상수 a, b 의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$y = x^2 + ax + b \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y = -2x + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$y = 4x - 2 \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} \text{과 } \textcircled{㉡} \text{이 접하므로 } x^2 + ax + b = -2x + 1$$

$$\text{즉, } x^2 + (a + 2)x + b - 1 = 0 \text{ 에서}$$

$$D = (a + 2)^2 - 4(b - 1) = 0$$

$$\therefore a^2 + 4a - 4b + 8 = 0 \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉠} \text{과 } \textcircled{㉢} \text{이 접하므로 } x^2 + ax + b = 4x - 2$$

$$\text{즉, } x^2 + (a - 4)x + b + 2 = 0 \text{ 에서}$$

$$D = (a - 4)^2 - 4(b + 2) = 0$$

$$\therefore a^2 - 8a - 4b + 8 = 0 \cdots \textcircled{㉤}$$

$$\textcircled{㉣} \text{과 } \textcircled{㉤} \text{을 연립하여 풀면 } a = 0, b = 2$$

$$\therefore a + b = 2$$

3. 사차방정식 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$ 은 i 를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a, b 는 실수)

- ① $-i$
- ② i
- ③ $-2i$
- ④ $3i$
- ⑤ $1 + 2i$

해설

$x = i$ 를 방정식에 대입하면 $i^4 - 3i^3 + 2i^2 + ai + b = 0$
 $(a + 3)i + b - 1 = 0$ 에서 a, b 는 실수이므로 $a = -3, b = 1$
따라서, 주어진 방정식은 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$
한편, $x = i$ 에서 $x^2 + 1 = 0$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + kx + 1)$
우변을 전개해서 계수비교하면 $k = -3$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$
따라서 나머지 세 근은 $-i$ 와 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이고
 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근의 곱은 1이다.
 $\therefore$ 나머지 세 근의 곱은 $-i \times 1 = -i$

해설

4차방정식 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 에서 네 근의 합은 $-\frac{b}{a}$,
네 근의 곱은 $\frac{e}{a}$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 네 근의 곱은 1
즉 ix (나머지 세 근의 곱)=1
 $\therefore$ 나머지 세근의 곱은 $\frac{1}{i} = -i$

4. 모든 x 에 대하여 $f(x+1) - f(x-1) = 6x^2 + 6$, $f(0) = 1$ 을 만족시키는 다항식 $f(x)$ 가 있다. 다음은 자연수 n 에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n + n\alpha x^{n-1} + \dots + \alpha^n$ 을 이용하여, $f(x)$ 를 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ (단, } a_n \neq 0 \text{) 라고 놓으면} \\ f(x+1) - f(x-1) &= a_n \{(x+1)^n - (x-1)^n\} + a_{n-1} \{(x+1)^{n-1} - (x-1)^{n-1}\} + \dots + \\ &+ a_1 \{(x+1) - (x-1)\} \\ &= \boxed{} x^{n-1} + \dots = 6x^2 + 6 \\ \text{예} \text{서 } n &= 3, a_n = 1 \\ \therefore f(x) &= x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + 1 \\ f(x+1) - f(x-1) &= 6x^2 + 4a_2 x + 2 + 2a_1 \\ \text{이} \text{므로 } a_2 &= 0, a_1 = 2 \text{ 즉, } f(x) = x^3 + 2x + 1 \end{aligned}$$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{}$ 에 알맞은 것은?

- ① a_n ② $2a_n$ ③ na_n ④ $2na_n$ ⑤ $3na_n$

해설

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x-1) &= a_n \{(x+1)^n - (x-1)^n\} + a_{n-1} \{(x+1)^{n-1} - (x-1)^{n-1}\} + \dots \\ &= a_n \{(x^n + nx^{n-1} + \dots) - (x^n - nx^{n-1} + \dots)\} + a_{n-1} \{(x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots) - (x^{n-1} - (n-1)x^{n-2} + \dots)\} + \dots \\ &= a_n (2nx^{n-1} + \dots) + a_{n-1} \{2(n-1)x^{n-2} + \dots\} + \dots \\ &= 2na_n x^{n-1} + \{(n-2) \text{ 차 이하의 다항식}\} \\ \therefore 2na_n x^{n-1} &= 6x^2 \text{ 예} \text{서} \\ n-1 &= 2, 2na_n = 6 \\ \therefore n &= 3, a_n = 1 \end{aligned}$$

5. 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 해를 p, q ($-1 < p < 0 < q < 1$)라 하자. 이차방정식 $cx^2 - bx + a = 0$ 의 해를 r, s ($r < s$)라 할 때, p, q, r, s 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?
- ① $p < q < r < s$
- ② $r < s < p < q$
- ③ $p < r < s < q$
- ④ $r < p < q < s$
- ⑤ 이 조건만으로는 알 수 없다.

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$$p + q = -\frac{b}{a}, \quad pq = \frac{c}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서, } r + s &= \frac{b}{c} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{p+q}{pq} \\ &= \left(-\frac{1}{p}\right) + \left(-\frac{1}{q}\right) \cdots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

$$rs = \frac{a}{c} = \frac{1}{pq} = \left(-\frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{q}\right) \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } \{r, s\} = \left\{-\frac{1}{p}, -\frac{1}{q}\right\}$$

$$-1 < p < 0 \text{에서 } -\frac{1}{p} > 1, \quad 0 < q < 1 \text{에서 } -\frac{1}{q} < -1$$

$$\therefore r = -\frac{1}{q} < -1 < p < q < 1 < -\frac{1}{p} = s$$