1. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$의 근 중에서 최대의 근은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 6 ⑤ 2

해설

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$x = 1,\ x = -1$을 대입하면 성립하므로

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

$= (x-1)(x+1)(x^2 + x - 6)$

$= (x-1)(x+1)(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ -1,\ 1,\ 2$

따라서 최대의 근은 2

2. 이차함수 $y=x^2+ax+b$가 두 직선 $y=-2x+1$, $y=4x-2$에 동시에 접할 때, 상수 a, b의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y=x^2+ax+b \cdots$ ㉠
$y=-2x+1 \quad \cdots$ ㉡
$y=4x-2 \quad \cdots$ ㉢

㉠과 ㉡이 접하므로 $x^2+ax+b=-2x+1$
즉, $x^2+(a+2)x+b-1=0$ 에서
$D=(a+2)^2-4(b-1)=0$
$\therefore a^2+4a-4b+8=0 \cdots$ ㉣
㉠과 ㉢이 접하므로 $x^2+ax+b=4x-2$
즉, $x^2+(a-4)x+b+2=0$ 에서
$D=(a-4)^2-4(b+2)=0$
$\therefore a^2-8a-4b+8=0 \cdots$ ㉤
㉣과 ㉤을 연립하여 풀면 $a=0, b=2$
$\therefore a+b=2$

3. 사차방정식 $x^4-3x^3+2x^2+ax+b=0$은 i를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a, b는 실수)

① $-i$ ② i ③ $-2i$

④ $3i$ ⑤ $1+2i$

해설

$x=i$를 방정식에 대입하면 $i^4-3i^3+2i^2+ai+b=0$

$(a+3)i+b-1=0$에서 a, b는 실수이므로 $a=-3, b=1$

따라서, 주어진 방정식은 $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$

한편, $x=i$에서 $x^2+1=0$

$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2+kx+1)$

우변을 전개해서 계수비교하면 $k=-3$

$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2-3x+1)=0$

따라서 나머지 세 근은 $-i$와 $x^2-3x+1=0$의 두 근이고

$x^2-3x+1=0$의 두 근의 곱은 1이다.

$\therefore$ 나머지 세 근의 곱은 $-i\times 1=-i$

해설

4차방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$에서 네 근의 합은 $-\frac{b}{a}$,

네 근의 곱은 $\frac{e}{a}$

$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$의 네 근의 곱은 1

즉 $i\times$(나머지 세 근의 곱)$=1$

$\therefore$ 나머지 세근의 곱은 $\frac{1}{i}=-i$

4. 모든 x에 대하여 $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+6$, $f(0)=1$을 만족시키는 다항식 $f(x)$가 있다. 다음은 자연수 n에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n + n\alpha x^{n-1} + \cdots + \alpha^n$을 이용하여, $f(x)$를 구하는 과정이다.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$(단, $a_n \neq 0$)라고 놓으면
$f(x+1)-f(x-1)$
$= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\} + \cdots +$
$a_1\{(x+1)-(x-1)\}$
$= \boxed{}\, x^{n-1} + \cdots = 6x^2+6$
에서 $n=3,\ a_n=1$
$\therefore\ f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1$
$f(x+1)-f(x-1) = 6x^2 + 4a_2x + 2 + 2a_1$
이므로 $a_2=0,\ a_1=2$ 즉, $f(x) = x^3+2x+1$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{}$에 알맞은 것은?

① a_n ② $2a_n$ ③ na_n ④ $2na_n$ ⑤ $3na_n$

해설

$f(x+1)-f(x-1)$
$= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}\cdots$
$= a_n\{(x^n+nx^{n-1}+\cdots)-(x^n-nx^{n-1}+\cdots)\} + a_{n-1}\{(x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots)-(x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\cdots)\}+\cdots$
$= a_n(2nx^{n-1}+\cdots) + a_{n-1}\{2(n-1)x^{n-2}+\cdots\}+\cdots$
$= 2na_nx^{n-1} + \{(n-2)$차 이하의 다항식$\}$
$\therefore\ 2na_nx^{n-1} = 6x^2$ 에서
$n-1=2,\ 2na_n=6$
$\therefore\ n=3,\ a_n=1$

5. 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해를 $p, q\ (-1<p<0<q<1)$라 하자. 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 해를 $r, s(r<s)$라 할 때, p, q, r, s의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $p<q<r<s$

② $r<s<p<q$

③ $p<r<s<q$

④ $r<p<q<s$

⑤ 이 조건만으로는 알 수 없다.

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$p+q=-\frac{b}{a},\ pq=\frac{c}{a}$

따라서, $r+s=\frac{b}{c}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{p+q}{pq}$

$=\left(-\frac{1}{p}\right)+\left(-\frac{1}{q}\right)\cdots$ ㉠

$rs=\frac{a}{c}=\frac{1}{pq}=\left(-\frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{q}\right)\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\{r,\ s\}=\left\{-\frac{1}{p},\ -\frac{1}{q}\right\}$

$-1<p<0$에서 $-\frac{1}{p}>1$, $0<q<1$ 에서 $-\frac{1}{q}<-1$

$\therefore\ r=-\frac{1}{q}<-1<p<q<1<-\frac{1}{p}=s$