

1. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해하였더니, $(x + ay)(x - by + c)$ 가 되었다.
이 때, a, b, c 를 순서대로 쓴 것은?

① $-1, 0, 1$

② $-1, 1, 2$

③ $-2, -1, 1$

④ $-1, -1, -2$

⑤ $-1, 2$

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - y^2 + 2y &= (x + y)(x - y) - 2(x - y) \\ &= (x - y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -1, b = -1, c = -2$$

2. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3) = 24$ 의 모든 실근의 합은?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3) = 24$ 를 전개하면
 $x^3 - 6x^2 + 11x - 30 = 0$
 $x = 5$ 를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

5		1	-6	11	-30
			5	-5	30
		1	-1	6	0

$(x-5)(x^2-x+6) = 0$
 $\therefore x = 5$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{2}$
따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

3. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겹넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{29}$ ③ $\sqrt{33}$ ④ 6 ⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$$2(ab + bc + ca) = 52$$

$$4(a + b + c) = 36 \rightarrow a + b + c = 9$$

(직육면체 대각선의 길이)

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)}$$

$$= \sqrt{81 - 52} = \sqrt{29}$$

4. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최소공배수가 $x^3 + 6x^2 - x - 30$ 이고, 최대공약수가 $x - 2$ 일 때, 두 다항식의 합을 바르게 구한 것은?
- ① $2x^2 + 4x - 16$ ② $2x^2 + 3x - 8$ ③ $x^2 - 5x - 1$
④ $2x^2 + x + 4$ ⑤ $x^2 + 2x + 5$

해설

두 이차 다항식을 $A = a(x - 2)$, $B = b(x - 2)$ (a , b 는 서로소) 라고 하면

$$L = x^3 + 6x^2 - x - 30 = abG = ab(x - 2) \text{ 이고,}$$

L 을 인수분해하면

$$L = (x - 2)(x^2 + 8x + 15) =$$

$$\frac{(x - 2)}{G} \frac{(x + 3)(x + 5)}{ab}$$

따라서, 두 다항식은

$$(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$$

$$(x - 2)(x + 5) = x^2 + 3x - 10 \text{ 이므로}$$

두 다항식의 합은

$$(x^2 + x - 6) + (x^2 + 3x - 10) = 2x^2 + 4x - 16$$

5. $\alpha = 1 + i, \beta = 1 - i$ 일 때, $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 2, \alpha\beta = 2 \\ \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{8 - 12}{2} \\ &= -2\end{aligned}$$

6. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$ 의 그래프가 a 의 값에 관계없이 직선 $y = mx + n$ 과 접할 때, 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$ 의 그래프가

직선 $y = mx + n$ 과 접하므로

$$x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1 = mx + n$$

$$\text{즉, } x^2 - (2a + m)x + a^2 + 2a - n - 1 = 0$$

$$\therefore 4am + m^2 - 8a + 4n + 4 = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 성립하므로

$$(4m - 8)a + (m^2 + 4n + 4) = 0$$

$$4m - 8 = 0, \quad m^2 + 4n + 4 = 0 \text{에서}$$

두 식을 연립하여 풀면 $m = 2, n = -2$

$$\therefore m + n = 0$$

7. $2^{16} - 1$ 은 1과 10 사이의 어떤 두 수로 나누어떨어진다. 이 때, 이 두 수의 합은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 임을 이용하여 $2^{16} - 1$ 을 인수분해하면
 $2^{16} - 1 = (2^8)^2 - 1^2$
 $= (2^8 + 1)(2^8 - 1)$
 $= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^4 - 1)$
 $= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2^2 - 1)$
 $= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1)$
 $= 257 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 3$
따라서 $2^{16} - 1$ 을 나누었을 때 나누어 떨어지는 1과 10 사이의 수
즉, 인수는 3과 5이고 이 두 수의 합은 8이다.

8. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)를 좌표평면 위의 점 $P(a, b)$ 에 대응시킬 때, $(2 - 3i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 P 가 그리는 도형은?
- ① 원 ② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선 ④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2-3i)z &= (2-3i)(a+bi) \\ &= (2a+3b) + (2b-3a)i \\ \therefore 2b-3a &= 0 \quad \therefore b = \frac{3}{2}a \Rightarrow \text{기울기가 양인 직선}\end{aligned}$$

9. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$ 을 만족하는 양수 x 에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$ 의 값은?

① 4 ② 2 ③ -1 ④ 5 ⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x 를 구하면

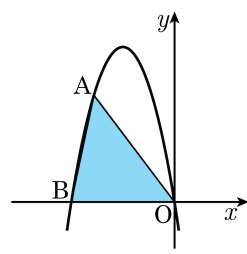
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$$

$$4x - \sqrt{41} = -1, \quad 2x^2 + x = 5$$

$$(\text{준식}) = (-1)^2 + (2x^2 + x - 1) = 1 + (5 - 1) = 5$$

10. 다음 그림은 축의 방정식이 $x = -3$ 인 이차 함수 $y = -x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최댓값은?



- ① 18 ② 27 ③ 36
④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x = -3$ 이므로 B 의 좌표는 $(-6, 0)$ 이다.

따라서 $y = -x^2 + bx + c$ 가 두 점

$(0, 0)$, $(-6, 0)$ 을 지나므로,

$$0 = c, 0 = -36 - 6b$$

$$b = -6, c = 0$$

$$y = -x^2 - 6x = -(x + 3)^2 + 9$$

$\triangle OAB$ 에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}$ 라

고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle OAB$ 의

넓이가 최대가 된다.

즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 9)$ 이므로

$$\triangle OAB \text{ 의 넓이} = \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times 9 = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$$

11. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + (3a-1)x^2 - 5ax + 2a = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ $-\frac{8}{9}$

⑤ $-\frac{17}{9}$

해설

$x^3 + (3a-1)x^2 - 5ax + 2a = 0$ 을 인수분해하면

$$(x-1)(x^2 + 3ax - 2a) = 0$$

i) 중근이 $x=1$ 인 경우

$x=1$ 을 $x^2 + 3ax - 2a$ 에 대입하면 0이 된다.

$$1 + 3a - 2a = 0$$

$$\therefore a = -1$$

ii) $x^2 + 3ax - 2a = 0$ 이 중근을 갖는 경우

$$\text{판별식 } D = 9a^2 + 8a = 0, \quad a(9a + 8) = 0,$$

$$\therefore a = 0, \quad a = -\frac{8}{9}$$

$$-1 + 0 - \frac{8}{9} = -\frac{17}{9}$$

12. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여
- $$\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
- $$= \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{2007}}{x-2007}$$
- 이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007}$ 의 값을 구하면?
- ① 1

② -1

③ 1997

④ 0

⑤ -1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007})x^{2006} + \cdots}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$= \frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007} = 0$$

13. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b = -\sqrt{2}$, $b + c = \sqrt{2}$ 일 때, $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 - 3(a - b)(b - c)(c - a)$ 의 값은?

- ① 0 ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} & (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 - 3(a - b)(b - c)(c - a) \\ &= \{(a - b) + (b - c) + (c - a)\} \\ & \quad \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \\ & \quad - (a - b)(b - c) - (b - c)(c - a) - (c - a)(a - b)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

14. 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 6$, $xy + yz + zx = 9$ 를 만족할 때 x 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 한다. 이 때 $M - m$ 의 값을 구하면 ?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y + z = 6 - x$,
 $yz = 9 - x(y + z) = 9 - x(6 - x) = (x - 3)^2$
실수 y, z 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면
 $t^2 - (6 - x)t + (x - 3)^2 = 0$
 $D = (6 - x)^2 - 4(x - 3)^2 \geq 0$ 에서 $x(x - 4) \leq 0$
 $\therefore 0 \leq x \leq 4$
 $M = 4, m = 0 \quad \therefore M - m = 4$

15. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 의 최소값이 -8 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 + 1 - a^2$ 에서 꼭지점의 x 좌표는 $-a$ 이다.

(i) $-a < -1$, 즉 $a > 1$ 일 때, $-1 \leq x \leq 2$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = 2 - 2a = -8$

$\therefore a = 5$

(ii) $-1 \leq -a < 2$, 즉 $-2 < a \leq 1$ 일 때, $-1 \leq x \leq 2$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-a) = 1 - a^2 = -8$, $a^2 = 9$

$\therefore a = \pm 3$

$-2 < a \leq 1$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $-a \geq 2$, 즉 $a \leq -2$ 일 때, $-1 \leq x \leq 2$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 5 + 4a = -8$

$\therefore a = -\frac{13}{4}$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $5 + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{7}{4}$