

1. 점 $(1, 2)$ 를 중심으로 하고 점 $(3, -2)$ 를 지나는 원의 방정식은?

① $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

② $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 32$

③ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$

④ $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 12$

⑤ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

해설

원의 반지름을 r 이라 하면

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ 이 $(3, -2)$ 를 지나므로

$$(3 - 1)^2 + (-2 - 2)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 20$$

$$\therefore (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

2. 방정식 $x^2 + y^2 + 2x = 0$ 이 나타내는 도형의 넓이를 구하면?

① 3π

② 2π

③ π

④ $\frac{1}{2}\pi$

⑤ $\frac{1}{3}\pi$

해설

(준식) : $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

중심 $(-1, 0)$, 반지름의 길이가 1 인 원이므로 넓이는 π

3. 세 점 P(1, 0), Q(0, -1), R(2, 2)을 지나는 원의 방정식은 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이다. 이때, $a + c$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ 2 ⑤ 3

해설

P, Q, R의 좌표를 원의 방정식에 각각 대입하면

$$\begin{cases} 1 + a + c = 0 \cdots \textcircled{A} \\ 1 - b + c = 0 \cdots \textcircled{B} \\ 2a + 2b + c + 8 = 0 \cdots \textcircled{C} \end{cases}$$

$\therefore \textcircled{A}$ 에서 $a + c = -1$

4. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0, 3)$, $(4, 3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

중심을 $(a, a - 1)$, 반지름을 r 이라 하면,

구하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a + 1)^2 = r^2 \dots\dots \textcircled{A}$$

i) $\textcircled{A}$ 이 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} a^2 + (4 - a)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow 2a^2 - 8a + 16 &= r^2 \dots\dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

ii) $\textcircled{A}$ 이 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} (4 - a)^2 + (4 - a)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow 2a^2 - 16a + 32 &= r^2 \dots\dots \textcircled{C} \end{aligned}$$

$$\textcircled{B} - \textcircled{C} : 8a - 16 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore \textcircled{B} \text{에서 } r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

5. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$

② $c^2 = b$

③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$

⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은
 $x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$
y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

6. 두 점 A(1, 2), B(-1, 4)를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$

② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 8$

③ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

④ $x^2 + (y-3)^2 = 2$

⑤ $x^2 + y^2 = 2$

해설

원의 중심 : $\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+4}{2} \right) = (0, 3)$

반지름 : $\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}$

∴ 원의 방정식 : $x^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{2})^2$

7. 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타내도록 k 값의 범위를 정하면?

① $k < -2$

② $k < -1$

③ $k > -2$

④ $k < 2$

⑤ $k > 1$

해설

방정식을 정리하면, $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2 - k$

원이 되려면 $2 - k > 0$ 을 만족해야 한다.

$\therefore k < 2$

8. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) &= 0 \\ -4x + 4y + 6 &= 0 \\ \therefore 2x - 2y - 3 &= 0\end{aligned}$$

9. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

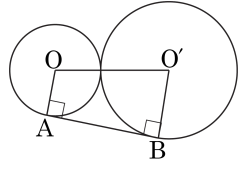
$\overline{C_1C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

따라서 공통접선은 3 개이다.

10. 다음 그림의 두 원 O 와 O' 에서 공통 접선 $\overline{AB}$ 의 길이를 구하면?
(단, $\overline{OO'} = 5\text{ cm}$, $\overline{OA} = 2\text{ cm}$, $\overline{O'B} = 3\text{ cm}$ 이다.)



- ① $\sqrt{6}\text{ cm}$ ② $2\sqrt{5}\text{ cm}$ ③ $2\sqrt{6}\text{ cm}$
④ $\sqrt{5}\text{ cm}$ ⑤ $3\sqrt{5}\text{ cm}$

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 - (3 - 2)^2} = 2\sqrt{6}(\text{cm})$$

11. 두 점 A(3, 0), B(-2, 0) 에서의 거리의 비가 2 : 3 인 점 P 의 자취의 넓이는?

① 9π ② 16π ③ 25π ④ 36π ⑤ 49π

해설

점 P 의 좌표를 P(x, y) 라 하면

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$$

즉 $4\overline{PB}^2 = 9\overline{PA}^2$ 이므로

$$4\{(x+2)^2 + y^2\} = 9\{(x-3)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 13 = 0$$

$$\therefore (x-7)^2 + y^2 = 36$$

따라서 점 P 는 중심이 (7, 0) 이고,

반지름의 길이가 6 인 원 위를 움직이므로

구하는 자취의 넓이는 $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$

12. 원 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = r^2 (r > 0)$ 과 원 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$ 이
외접하기 위한 r 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 원이 외접하려면 중심사이의 거리가

반지름 합과 같아야 한다.

$$\Rightarrow \sqrt{(1-(-2))^2 + (-2-2)^2} = r + 3$$

$$\therefore r = 2$$

13. 실수 a, b 와 두 원

$$A : (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 + 1,$$

$$B : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ 에 대하여}$$

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a + b = -1$

② $a + b = 1$

③ $a - b = 0$

④ $a^2 + b^2 = 1$

⑤ $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 1$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이
원B 의 중심인 (1, 1) 을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
 $(a - 1)x + (b - 1)y + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 점 (1, 1) 을 지나므로
 $(a - 1) \times 1 + (b - 1) \times 1 + 1 = 0$
 $\therefore a + b = 1$

14. 점 A(0, 6) 과 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 이다. 이 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원위의 점을 (X, Y) 라 하면, $X^2 + Y^2 = 4$

중점 M 은

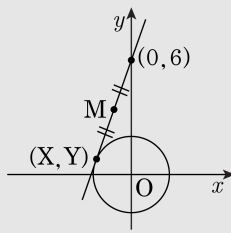
$$M\left(\frac{X}{2}, \frac{Y+6}{2}\right) = (x, y)$$

$X = 2x, Y = 2y - 6$ 대입하면

$$(2x)^2 + (2y - 6)^2 = 4$$

$$x^2 + (y - 3)^2 = 1$$

$$a = 0, b = 3, r = 1$$



15. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 7$ 의 공통현의 길이를 구하면?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 = 1$ 은 중심이 원점이고 반지름이 1인 원이다.
 $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 7$ 은 중심이 (3, 3)이고 반지름이 5인 원이다.
공통현의 방정식은
 $(x^2 + y^2 - 1) - (x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7) = 0$
 $\therefore x + y + 1 = 0$
이때, $x^2 + y^2 = 1$ 의 원과 $x + y + 1 = 0$ 의 교점을 구하면
(0, -1), (-1, 0)에서 접하여 공통현의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.