1. 두 실수 $a,\ b$에 대하여 부등식 $ax > b$의 해가 $x < -2$ 일 때, 부등식 $bx > 2a + 4b$의 해는?

① $x > 0$　② $x > 1$　③ $x > 2$　④ $x > 3$　⑤ $x > 4$

해설

부등식 $ax > b$의 해가 $x < -2$로 부등호의 방향이 바뀌었으므로
$a < 0$
이때, $x < \frac{b}{a}$에서 $\frac{b}{a} = -2 \therefore b = -2a$
따라서 $bx > 2a + 4b$ 에서 $b = -2a$ 를 대입하면
$-2ax > 2a + 4 \cdot (-2a)$
$-2ax > -6a$
$a < 0$에서 $-2a > 0$이므로
$x > \frac{-6a}{-2a} \therefore x > 3$

2. 다음 중 연립부등식 $\begin{cases} 5x+3<18 \\ -3x+2<0 \end{cases}$ 의 해가 아닌 것을 모두 고르면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$\begin{cases} 5x+3<18 \\ -3x+2<0 \end{cases}$ 을 풀면 $\begin{cases} x<3 \\ x>\frac{2}{3} \end{cases}$ 이다.

따라서 $\frac{2}{3}<x<3$ 을 만족하지 않는 것은 $\frac{1}{3}$, 3 이다.

3. 부등식 $-1 < -2x + 1 < 3$ 의 해는?

① $-2 < x < 2$ ② $-2 < x < -1$ ③ $-1 < x < 1$
④ $-1 < x < 2$ ⑤ $1 < x < 2$

해설

$-1 < -2x + 1 < 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 < -2x + 1 \\ -2x + 1 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases}$$

$\therefore\ -1 < x < 1$

4. 연립부등식 $\begin{cases} 4x-2 \geq -10 \\ 6-x>3 \end{cases}$ 의 해가 $a \leq x < b$ 일 때, 상수 $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$6-x>3 \to x<3$
$4x-2 \geq -10 \to x \geq -2$
$\therefore\ a+b=-2+3=1$

5. 연립부등식 $\begin{cases} 2x^2+3x-2 \le 0 \\ 2x^2+x-3<0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2<x\le\frac{1}{2}$ ② $-2<x\le 1$ ③ $-\frac{3}{2}<x\le 1$
④ $-\frac{3}{2}<x\le\frac{1}{2}$ ⑤ $1<x\le 2$

해설

$\begin{cases} 2x^2+3x-2 \le 0 & \cdots (가) \\ 2x^2+x-3<0 & \cdots (나) \end{cases}$

(가)에서 $(2x-1)(x+2)\le 0$

$\therefore -2\le x\le\frac{1}{2}$

(나)에서 $(2x+3)(x-1)<0$

$\therefore -\frac{3}{2}<x<1$

따라서 공통 범위를 구하면

$-\frac{3}{2}<x\le\frac{1}{2}$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 5(x-9) < 4x-7 \\ 4x-7 \le 5(x-8) \end{cases}$ 을 만족하는 해집합 중에서 가장 작은 정수는?

① 33　② 34　③ 35　④ 36　⑤ 37

해설

$5x-45 < 4x-7$,　$x < 38$

$4x-7 \le 5x-40$,　$33 \le x$

$\therefore$ $33 \le x < 38$

7. 두 부등식 $0.3x + 1.2 > 0.5x$, $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x$을 동시에 만족하는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답: ＿＿＿＿ 개

▷ 정답: 11 개

해설

$0.3x + 1.2 > 0.5x$ 의 양변에 10을 곱하면
$3x + 12 > 5x$
$3x - 5x > -12$
$-2x > -12$
$x < 6$
$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x$ 의 양변에 12 를 곱하면
$8x - 6 < 9x$
$x > -6$
따라서 $-6 < x < 6$ 이고 정수는
$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 의 11개이다.

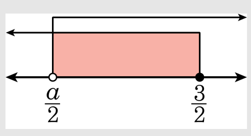
8. 연립부등식 $\begin{cases} x \le \dfrac{3}{2} \\ 2x > a \end{cases}$ 을 만족하는 정수의 개수가 5 개일 때, a 의 값의 범위는?

① $a > -6$ ② $-8 < a \le -6$ ③ $a < -8$

④ $-8 \le a < -6$ ⑤ $-8 \le a \le -6$

해설

x 의 범위가 그림과 같을 때 5 개의 정수해를 갖는다.



$-4 \le \dfrac{a}{2} < -3$ 양변에 2 을 곱하면 $-8 \le a < -6$

9. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+5<3x+2 \\ \dfrac{x-5}{4}<-\dfrac{x+1}{2} \end{cases}$ 을 만족시키는 정수의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(i) $2x+5<3x+2$, $x>3$

(ii) $\dfrac{x-5}{4}<-\dfrac{x+1}{2}$, $x<1$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수는 없다.

10. 연립부등식 $\begin{cases} -x+a>5 \\ 3-2x \le 1 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a>3$ ② $a<3$ ③ $a>6$ ④ $a<6$ ⑤ $a \le 6$

해설

$\begin{cases} -x+a>5 & \rightarrow & a-5>x \\ 3-2x \le 1 & \rightarrow & 1 \le x \end{cases}$

해가 없으려면 $a-5 \le 1$

$\therefore a \le 6$

11. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는가?

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 6 개

해설

자두의 개수 : $(9-x)$ 개 , 복숭아의 개수 : x 개

$2800 \le 200(9-x)+500x \le 3600$

$$\begin{cases} 2800 \le 200(9-x)+500x \\ 200(9-x)+500x \le 3600 \end{cases}$$

$\therefore \frac{10}{3} \le x \le 6$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

12. 부등식 $|x-1|+|x-3|<6$의 해와 같은 해를 갖는 이차부등식으로 옳은 것은?

① $x^2-4x-5<0$　　② $x^2-4x+3<0$
③ $x^2-6x+5<0$　　④ $x^2-4x+3\leqq 0$
⑤ $x^2-8x+15\leqq 0$

해설

(ⅰ) $x<1$일 때, $-x+1-x+3<6$
$x>-1 \quad \therefore -1<x<1$
(ⅱ) $1\leq x<3$일 때, $x-1-x+3<6$
$2<6 \quad \therefore 1\leq x<3$
(ⅲ) $x\geq 3$일 때, $x-1+x-3<6$
$x<5 \quad \therefore 3\leq x<5$
$\therefore -1<x<5$
$\Leftrightarrow (x+1)(x-5)<0,\ x^2-4x-5<0$

13. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\dfrac{a-7}{2}$ 또는 $x>\dfrac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\dfrac{a-7}{2}=-1$, $\dfrac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

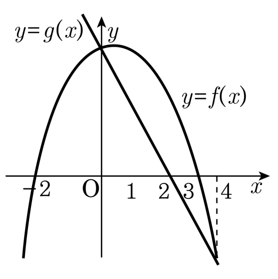
14. 부등식 $ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a > 1$　② $a < -\frac{1}{3}$　③ $a \geq -\frac{1}{3}$
④ $a \leq -\frac{1}{3}$　⑤ $-\frac{1}{3} < a < 1$

해설

$ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하는 경우는
전체에서 모든 실수 x에 대하여
$ax^2 + (a+1)x + a < 0$인 경우를 제외하면 된다.
$ax^2 + (a+1)x + a < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
$a < 0 \cdots$ ㉠
또, 이차방정식 $ax^2 + (a+1)x + a = 0$의 판별식을 D라 할 때,
$D = (a+10)^2 - 4a^2 < 0,\ -3a^2 + 2a + 1 < 0$
$3a^2 - 2a - 1 > 0,\ (3a+1)(a-1) > 0$
$\therefore a < -\frac{1}{3}$ 또는 $a > 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a < -\frac{1}{3}$
따라서 $ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하려면
$a \geq -\frac{1}{3}$이면 된다.

15. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해를 구하면?



① $-2 < x < 4$　　② $-2 < x < 3$

③ $0 < x < 4$　　④ $2 < x < 3$

⑤ $3 < x < 4$

해설

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는
함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = g(x)$ 보다
위쪽에 있는 x 의 구간을 의미하므로
구하는 해는 $0 < x < 4$

16. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x^2-4<0 \\ x^2-4x<5 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1<x<2$

해설

부등식 $x^2-4<0$에서 $(x+2)(x-2)<0$

$\therefore -2<x<2 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2-4x<5$에서 $x^2-4x-5<0$

$(x+1)(x-5)<0$

$\therefore -1<x<5 \cdots\cdots$ ㉡

따라서 구하는 해는 ㉠과 ㉡를

동시에 만족하는 x의 값이므로

$\therefore -1<x<2$

17. $64 \le 16x - x^2$ 의 해를 구하면?

① $4 \le x \le 8$ ② $x = 8$ ③ 해는 없다.
④ 모든 실수 ⑤ $x \le 8$

해설

$64 \le 16x - x^2$
$x^2 - 16x + 64 \le 0$
$\Rightarrow \quad (x-8)^2 \le 0$
$\Rightarrow \quad x = 8$

18. 두 대의 승용차 A, B가 같은 거리를 가는데 A는 거리의 반은 시속 vkm로 달리고, 나머지 거리는 시속 u km로 달린다고 한다, 또한 B는 소요된 시간의 반은 시속 u km로 달리고 나머지 소요된 시간은 v km로 달린다고 한다. 승용차 A, B의 평균 속력이 각각 x km/시, y km/시일 때, x와 y의 대소 관계를 바르게 나타내 것은?

① $x \le y$ ② $x \ge y$ ③ $x = y$ ④ $x < y$ ⑤ $x > y$

해설

승용차 A가 달린 거리를 s,

시간을 t라 하면 $t = \dfrac{s}{2u} + \dfrac{s}{2v}$

평균 속력은

$$\frac{s}{t} = \frac{s}{\dfrac{s}{2u} + \dfrac{s}{2v}} = \frac{s}{\dfrac{su + sv}{2uv}} = \frac{2uv}{u + v} = x$$

승용차 B의 평균 속력은 $\dfrac{1}{2}(u + v) = y$

$$y - x = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{2uv}{u + v}$$

$$= \frac{(u + v)^2 - 4uv}{2(u + v)} \ge 0$$

따라서 $y - x \ge 0$이므로 $x \le y$이다.

19. 모든 실수 x 에 대하여 곡선 $y = x^2 + (k-2)x + 3$ 의 그래프가 직선 $y = x + 2$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있기 위한 실수 k 의 값의 범위는?

① $1 < k < 5$ ② $1 \le k \le 5$ ③ $k \le -1, k \le 5$
④ $k < 1, k > 5$ ⑤ $k \le 1, k \ge 5$

해설

곡선의 그래프가 직선의 그래프보다 위쪽에 있으려면 $x^2 + (k-2)x + 3 > x + 2$

$\therefore\ x^2 + (k-3)x + 1 > 0$

위의 부등식이 항상 만족해야 하므로

방정식 $x^2 + (k-3)x + 1 = 0$ 의 판별식 D 가 $D < 0$ 이어야 한다.

$D = (k-3)^2 - 4 < 0$

$k^2 - 6k + 5 < 0$

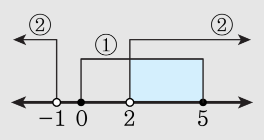
$\therefore\ 1 < k < 5$

20. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설



첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x-5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.

21. 이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k < 7$　② $-1 \le k \le 2$　③ $-5 \le k \le -2$
④ $-7 < k \le -1$　⑤ $-7 < k \le -3$

해설

이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의
두 근이 모두 1 보다 크므로
$f(x)=x^2+2kx+6-k$ 로 놓으면
(i) $D \ge 0$ 이므로
$k^2+k-6 \ge 0$
$(k+3)(k-2) \ge 0$
$\therefore k \le -3, k \ge 2$
(ii) $x^2+2kx+6-k=(x+k)^2+6-k-k^2$ 에서
$-k > 1$
$\therefore k < -1$
(iii) $f(1) > 0$ 이므로
$1+2k+6-k > 0$
$\therefore k > -7$
따라서 (i), (ii), (iii) 에서
$\therefore -7 < k \le -3$

22. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

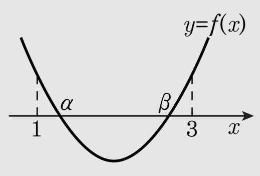
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

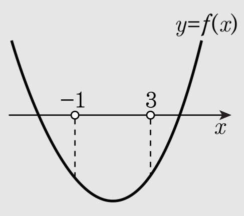
23. $-1 < x < 3$인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k<0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0$, $f(3) \le 0$이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0$, $k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$
(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0$, $9k + 3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$
(i), (ii)에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

24. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$일 때 부등식 $cx^2-bx-a>0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-2<x<1$ 이므로 $a<0$
해가 $-2<x<1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1)<0$,
즉 $x^2+x-2<0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2+ax-2a>0$ 이 부등식이
$ax^2+bx+c>0$ 과 같으므로
$b=a, c=-2a\cdots$(개)
(개)를 $cx^2-bx-a>0$ 에 대입하면
$-2ax^2-ax-a>0$, $2x^2+x+1>0(\because -a>0)$
이 때 방정식 $2x^2+x+1=0$ 의 판별식
$D=1^2-4\cdot 2=-7<0$ 이므로
$2x^2+x+1>0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 9$의 9개이다.

25. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ x^2-2x-3>0 \end{cases}$ 의 값은?

① $x>-1$ ② $-4<x<-1$ ③ $0<x<4$

④ $1<x<4$ ⑤ $-4<x<3$

해설

$x^2+3x-4<0 \Rightarrow (x-1)(x+4)<0$
$\Rightarrow -4<x<1$

$x^2-2x-3>0 \Rightarrow (x+1)(x-3)>0$
$\Rightarrow x<-1$ 또는 $x>3$

$\therefore$ 공통부분을 구하면 $-4<x<-1$