1. $x^2-2ax+2a+3<3$을 만족하는 x가 없도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1개 ② 3개 ③ 5개 ④ 7개 ⑤ 9개

해설

$x^2-2ax+2a+3<0$의 해가 존재하지 않으려면
모든 실수 x에 대하여
$x^2-2ax+2a+3\geq 0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=a^2-(2a+3)\leq 0,\ (a-3)(a+1)\leq 0$$

$\therefore -1\leq a\leq 3$
따라서, 구하는 정수 a의 개수는
$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 5개이다.

2. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면

$-8 \le x^2-8 \le 8$

$0 \le x^2 \le 16$

$\therefore -4 \le x \le 4$

$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면

$-k < x-2 < k$

$-k+2 < x < k+2$

이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면

$-k+2 \ge -4,\ k+2 \le 4$이어야 하므로

$k \le 6,\ k \le 2$

$\therefore 0 < k \le 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

3. x에 대한 부등식 $x(x+1) < a(x+1)-1$의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a의 범위는?

① $a \le -3$ 또는 $a \ge 1$

② $-3 \le a \le 1$

③ $a < -3$ 또는 $a > 1$

④ $-3 < a < 1$

⑤ $-1 \le a \le 3$

해설

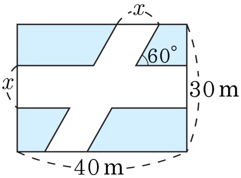
$x(x+1) < a(x+1)-1$을 전개하여 이항하면 $x^2+(1-a)x-a+1 < 0$ 이차항의 계수가 양수이므로 판별식 $D \le 0$이면 부등식의 해가 없다.

$D = (1-a)^2 + 4(a-1) \le 0$

$(a-1)(a+3) \le 0$

$\therefore \quad -3 \le a \le 1$

4. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 40 m, 30 m 인 직사각형꼴의 땅에 같은 폭의 두 도로를 60°로 교차하도록 만들었다. 이 때, 남은 땅의 넓이가 600 m^2 이상이 되도록 할 때, 도로 폭의 최대 길이는?



① 4m　② 6m　③ 8m　④ 10m　⑤ 12m

해설

남은 땅의 넓이를 S 라 하면

$S = 40 \times 30 - (40x + 30x - x^2) \geq 600$

$\therefore\ x^2 - 70x + 600 \geq 0$

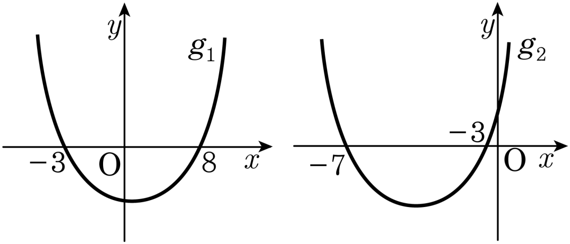
$(x-10)(x-60) \geq 0$ 에서 $x \leq 10$ 또는

$x \geq 60$ $(0 < x < 30)$ 이 된다.

그러므로 도로폭의 최대 길이는

$0 < x \leq 10$ 이므로 10 m 이다.

5. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\dfrac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0,\ (x + 12)(x - 2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

6. 부등식 $5-x>2|x+1|$의 해와 $ax^2+bx+7>0$의 해가 같도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -7　　② -5　　③ 5　　④ 7　　⑤ 0

해설

$5-x>2|x+1|$ 을 풀면

(ⅰ) $x \geq -1$ 일 때

$5-x>2x+2,\ x<1 \quad \therefore -1 \leq x<1$

(ⅱ) $x<-1$ 일 때

$5-x>-2x-2,\ x>-7 \quad \therefore -7<x<-1$

(ⅰ), (ⅱ)에 따라 $-7<x<1$

$ax^2+bx+7>0 \Leftrightarrow -7<x<1$ 이므로 $a<0$ 이고

$ax^2+bx+7=a(x+7)(x-1)$

계수를 비교하면

$a=-1, b=-6 \quad \therefore\ a+b=-7$

7. 두 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0, x^2+(a-1)x+a^2=0$중 적어도 하나가 실근을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a<\frac{1}{2},\ 2<a$ ② $a\le 1,\ 3\le a$ ③ $a\le\frac{1}{2},\ 3<a$
④ $a\le\frac{1}{2},\ 2<a$ ⑤ $a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

해설

각각 실근을 가질 조건은 차례로

$\frac{D_1}{4}=a^2-(a+2)\ge 0$에서

$(a-2)(a+1)\ge 0,\ a\le -1,\ a\ge 2\cdots$ ①

또, $D_2=(a-1)^2-4a^2\ge 0$에서

$(3a-1)(a+1)\le 0,\ \ -1\le a\le\frac{1}{3}\cdots$ ②

따라서, 적어도 하나가 실근을 갖기 위한

a의 범위는 ① 또는 ②이므로

$a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$