1. 두 점 $(2,-1)$, $(4,3)$ 을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

두 점 $(2,-1)$, $(4,3)$ 을 지나는 직선은

$$y+1=\frac{3-(-1)}{4-2}(x-2)$$

$$\therefore 2x-y-5=0$$

원점에서 이 직선까지의 거리는

$$\frac{|2\times 0-0-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

2. 서로 수직인 두 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 와 $y = 2x$ 의 교점을 H 라 할 때, H 의 좌표는 ( ) 이다. 따라서, 원점에서 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 까지의 거리는 ( ) 이다. 위의 ( ) 안에 알맞은 것을 차례대로 나열하면?

① $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right),\ \frac{2\sqrt{5}}{5}$
② $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right),\ \frac{4\sqrt{5}}{5}$
③ $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right),\ \frac{3\sqrt{5}}{5}$
④ $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right),\ \frac{4\sqrt{5}}{5}$
⑤ $(1, 2),\ \sqrt{5}$

해설

두 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 와 $y = 2x$ 의 교점

H 의 좌표는 $-\frac{1}{2}x + 2 = 2x$, $-x + 4 = 4x$

이고 $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{8}{5}$ 이다. 즉, H $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ 이므로

따라서 $\overline{OH} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

3. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\dfrac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$

$\therefore\ k = 0$

이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로
구하는 점은 $(1,\ 1)$

$\therefore\ a = 1,\ b = 1$

$\therefore\ a + b = 2$

4. 원점에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 4　② 8　③ $3\sqrt{2}$　④ 4　⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a\times 0+b\times 0+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$4=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\to\ 2(a^2+b^2)=16$

$\therefore\ a^2+b^2=8$

5. 원점을 지나고, 점 $(2,\ 1)$에서의 거리가 1인 직선의 방정식은? (단, x축은 제외)

① $y=\frac{2}{3}x$　② $y=-\frac{2}{3}x$　③ $y=\frac{1}{3}x$
④ $y=-\frac{4}{3}x$　⑤ $y=\frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을
$y=kx(k\neq 0)$이라 하면,
$(2,\ 1)$에서의 거리가 1이므로
$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1,\ |2k-1|=\sqrt{k^2+1},\ k(3k-4)=0$
$k=\frac{4}{3}\ (\because k\neq 0)$
$\therefore\ y=\frac{4}{3}x$

6. 두 직선 $3x+4y+4=0,\ 3x+4y+2=0$ 사이의 거리는 얼마인가?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

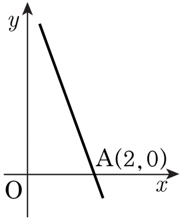
해설

$3x+4y+4=0$ 의 임의의 한 점을 잡는다.

$(0,-1)$ 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하면

$$\therefore \frac{|3\cdot 0+4\cdot(-1)+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}$$

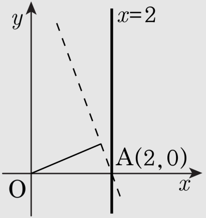
7. 점 $A(2,0)$ 을 지나는 임의의 직선 l 에 대하여 원점 O 와 직선 l 사이의 거리의 최댓값은?



① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{2}$

④ $\sqrt{5}$ ⑤ 4

해설



다음의 그림에서 점 $A(2,0)$ 을 지나고
y 축에 평행한 직선 l , 곧 직선 $x=2$ 에 대하여
원점 O 와l 사이의 거리가 최대가 되며
이 때 그 거리는 2 이다

8. 세 꼭지점이 $A(1,\ 2)$, $B(-1,\ 2)$, $C(-2,\ 0)$ 로 주어지는 삼각형 ABC 의 넓이는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

점 $A\ (1\ ,2\ )$ 에서 직선 BC 에 이르는 거리를 구하여 높이로 하고, $\overline{BC}$ 의 길이를 밑변의 길이로 하여 삼각형 의 넓이를 구한다. 직선 BC 의
방정식은 $2x - y + 4 = 0$ 이므로,
점 $A\ (1\ ,2\ )$ 에서 직선 BC 에 이르는 거리는
$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.
변 BC 의 길이 : $\sqrt{5}$
$\therefore\ \triangle ABC = \sqrt{5} \times \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \times \dfrac{1}{2} = 2$
$\therefore\ \triangle ABC = 2$

해설

세꼭지점이 주어질 때 넓이는
$S = \dfrac{1}{2}|(1 \times 2) + (-1 \times 0) + (-2 \times 2) -$
$(-1 \times 2) + (-2 \times 2) + (1 \times 0)| = 2$

9. 세 직선 $x+2y-2=0$, $3x-y-6=0$, $2x-3y+3=0$에 의해서 만들어지는 삼각형의 넓이는?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

$$\begin{cases} x+2y-2=0 \cdots ㉠ \\ 3x-y-6=0 \cdots ㉡ \\ 2x-3y+3=0 \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠과 ㉡, ㉠과 ㉢, ㉡과 ㉢의 교점을 각각
A, B, C라 하고 교점을 구한다.
(i) ㉠ + ㉡ × 2에서 $x=2, y=0$.
$\therefore \mathrm{A}=(2,0)$
(ii) ㉠ × 2 − ㉢에서 $x=0, y=1$.
$\therefore \mathrm{B}=(0,1)$
(iii) ㉡ × 3 − ㉢에서 $x=3, y=3$.
$\therefore \mathrm{C}=(3,3)$
$\overline{\mathrm{BC}}$를 밑변으로 하면,
밑변의 길이는 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$
높이는 A와 ㉢ 사이의 거리이므로
삼각형의 높이는 $\frac{|4-0+3|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{7}{\sqrt{13}}$
$\therefore \triangle\mathrm{ABC}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\ \sqrt{13}\ \frac{7}{\sqrt{13}}=\frac{7}{2}$

10. 서로 다른 두 직선 $2x-ay-2=0$, $x-(a-3)y-3=0$이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\dfrac{3}{5}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$$\begin{cases} 2x-ay-2=0 \\ x-(a-3)y-3=0 \end{cases}$$ 정리하면

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{a}x-\dfrac{2}{a} \\ y=\dfrac{1}{a-3}x-\dfrac{3}{a-3} \end{cases}$$ 평행하므로

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{a-3}$$

$\therefore\ a=6$ 대입하면

$$\begin{cases} x-3y-1=0 \\ x-3y-3=0 \end{cases}$$

$x-3y-1=0$위의 점 $(1,\ 0)$과 $x-3y-3=0$과의 거리는

$$\therefore\ \frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

11. 좌표평면 위의 점 A$(-1,\ 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 B$(0,\ 2)$ 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

① $-\frac{1}{2}$　　② $-\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y = m(x+1)$

$\therefore\ mx - y + m = 0$

점 B$(0,\ 2)$ 에서

직선 l 까지의 거리는 $\dfrac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2 + 4m + 1 = 0$

$(2m+1)^2 = 0$

$\therefore\ m = -\dfrac{1}{2}$

12. 좌표평면 위의 원점에서 직선$3x-y+2-k(x+y)=0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3-k)x-(1+k)y+2=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3-k)^2+(1+k)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}$$

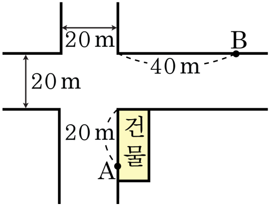
거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$2k^2-4k+10=2(k-1)^2+8\geq 8$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}\leq\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ 최대값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. 다음 그림과 같이 폭이 20 m 인 인도가 수직으로 만나고 있다. A 지점에 서 있는 사람이 B 지점에 있는 가로등을 보기 위하여 움직여야 할 최소 거리는?(단위는 m)

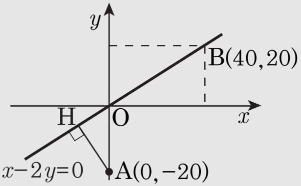


① $2\sqrt{10}$ ② $4\sqrt{10}$ ③ $6\sqrt{5}$

④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

해설

그림과 같이 건물의 모서리를 원점으로 하는
좌표축을 생각하면 A, B 지점의 좌표는
각각$(0, -20)$, $(40,\ 20)$ 이다. 이 때, 원점과
점 B 를 지나는 직선의 방정식이 $x-2y=0$
이므로 가로등을 보기 위하여 움직여야 할
최소거리는 점 A 와 직선 $x-2y=0$
사이의 거리이다. $\therefore\ \overline{AH} = \dfrac{|1\cdot 0 - 2\cdot(-20)|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 8\sqrt{5}$



14. x, y 에 대한 방정식 $xy+x+y-1=0$ 을 만족시키는 정수 x, y 를 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$ 로 나타낼 때, 이 점들을 꼭지점으로 하는 사각형의 넓이는?

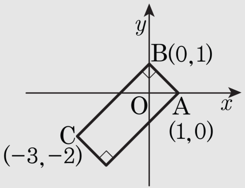
① 2 ② 6 ③ 8 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$xy+x+y-1=0$ 에서 $(x+1)(y+1)=2 \cdots$ ㉠ 이고, x, y 는 정수이므로

㉠ 을 만족하는 정수해를 순서쌍으로 나타내면 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$, $(-2, -3)$, $(-3, -2)$ 이다.

네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 그림과 같다.



사각형 $ABCD$ 는 직사각형이고 넓이는

$\overline{AB}\times\overline{BC}=\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6$