

1. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \leq y \leq 10\}$ 에 대하여 $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 정답: 4

해설

일차함수 $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ 이고

$f(-1) = -a + b$, $f(4) = 4a + b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a + b \leq y \leq 4a + b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는
공역과 치역이 같아야 하므로

$$-a + b = -5, \quad 4a + b = 10$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$$\therefore 2a + b = 4$$

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 일대일 대응 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$f : A \rightarrow B$ 가 일대일대응이라면 3 은 a_3, a_4, a_5 중 하나의 원소와 대응하고, 4 는 나머지 두 가지 원소중의 하나와 대응하여야 한다. 또 5 는 3, 4 가 대응하고 남은 원소와 대응하게 되므로 함수 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$

3. 두 함수 $f(x) = -x + 4$, $g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(k) = 2$ 를 만족하는 상수 k 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2)$$

$$= -(3x + 2) + 4 = -3x + 2 \text{ 이므로}$$

$$(f \circ g)(k) = 2 \text{ 에서 } -3k + 2 = 2$$

$$\therefore k = 0$$

4. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -x + k$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -5

② -6

③ -7

④ -8

⑤ -9

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{ 에서 } -2x + 2k + 3 = -2x - 3 + k$$

$$\therefore k = -6$$

5. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100 \text{ 일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100 \text{ 일 때}) \end{cases}$ 에서 $f(98)$ 의 값을 구하면?

① 80

② 85

③ 95

④ 99

⑤ 102

해설

자연수 n 에 대하여

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100 \text{ 일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100 \text{ 일 때}) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f(98) &= f(f(100)) = f(99) = f(f(101)) \\ &= f(100) = 99 \end{aligned}$$