1. 가로, 세로의 길이가 각각 8cm, 6cm 인 직사각형에서 가로의 길이는 $x$cm 만큼 줄이고, 세로의 길이는 $2x$cm 만큼 길게 하여 얻은 직사각형의 넓이를 $y$cm^2 라고 할 때, y 를 최대가 되게 하는 x 의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{25}{2}$ ④ $\frac{31}{5}$ ⑤ $\frac{16}{5}$

해설

줄어든 가로의 길이는 $(8-x)$cm ,
늘어난 세로의 길이는 $(6+2x)$cm 에서

$$\begin{aligned} y &= (8-x)(6+2x) \\ &= 48+10x-2x^2 \\ &= -2\left(x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}\right)+48 \\ &= -2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{121}{2} \end{aligned}$$

따라서 $x=\frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{121}{2}$ 을 갖는다.

2. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 16 ② 20 ③ 36 ④ 55 ⑤ 64

해설

부채꼴의 반지름을 a, 넓이를 b 라 하면

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8 - a) \\ &= -a^2 + 8a \\ &= -(a^2 - 8a + 16 - 16) \\ &= -(a - 4)^2 + 16 \end{aligned}$$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.
따라서 $ab = 64$ 이다.

3. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

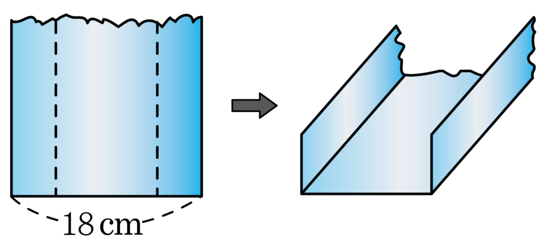
① $-\frac{7}{8}$ ② -1 ③ $\frac{1}{8}$ ④ 1 ⑤ $-\frac{9}{8}$

해설

$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$

$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$ 이므로 m 의 최댓값은 $-\frac{7}{8}$ 이다.

4. 다음 그림과 같이 너비가 18cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 되도록 하려면 물받이의 높이를 얼마로 해야 하는가?



① 4.5 cm ② 4.0 cm ③ 3.8 cm
④ 3.6 cm ⑤ 3.4 cm

해설

물받이의 높이를 x 라 할 때,
단면의 넓이는 $y = x(18 - 2x)$

$y = -2x^2 + 18x = -2\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{2}$

따라서 $x = \frac{9}{2}$(cm) 일 때, 최대값 $\frac{81}{2}$(cm^2)를 갖는다.

5. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t-5t^2)$m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

① 5 초 후 ② 7 초 후 ③ 8 초 후
④ 10 초 후 ⑤ 알 수 없다.

해설

$y = 50t - 5t^2$
$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25) = -5(t-5)^2 + 125$
따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가 된다.

6. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 -2, 4 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

① -10 ② -12 ③ -14 ④ -16 ⑤ -18

해설

$ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 -2, 4 이므로

$y=ax^2+bx+c$

$=a(x+2)(x-4)$

$=a(x^2-2x-8)$

$=a(x-1)^2-9a$

최댓값이 9 이므로 $-9a=9$

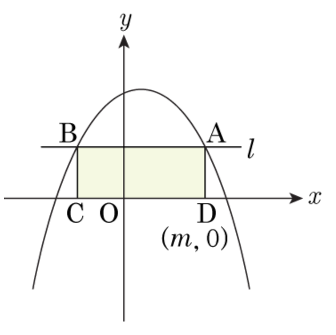
$\therefore a=-1$

따라서 구하는 이차함수는 $y=-x^2+2x+8$ 이고

$b=2$, $c=8$ 이다.

$\therefore abc=-1\times2\times8=-16$

7. $y=-x^2+x+6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레의 길이의 최댓값은?($\frac{1}{2}<m<3$)



① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10
④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y=-x^2+x+6=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m,\ -m^2+m+6)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2(m-\frac{1}{2})$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2+m+6$

$$\begin{aligned}(\square\text{ABCD둘레의 길이}) &= 2\{2(m-\tfrac{1}{2})-m^2+m+6\}\\ &= 2(2m-1-m^2+m+6)\\ &= 2(-m^2+3m+5)\\ &= -2(m-\tfrac{3}{2})^2+\tfrac{29}{2}\end{aligned}$$

$m=\frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.