

1. 평행한 두 직선 $3x - 5y + 2 = 0$, $3x - 5y - 1 = 0$ 사이의 거리는?

① $\frac{2\sqrt{17}}{17}$
④ $\frac{2\sqrt{34}}{34}$

② $\frac{3\sqrt{17}}{17}$
⑤ $\frac{3\sqrt{34}}{34}$

③ $\frac{\sqrt{34}}{34}$

해설

$3x - 5y + 2 = 0$ 위의 점 $\left(0, \frac{2}{5}\right)$ 에서

$3x - 5y - 1 = 0$ 까지의 거리

$$\frac{\left|3 \cdot 0 - 5 \cdot \frac{2}{5} - 1\right|}{\sqrt{9+25}} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$$

2. 원점을 지나고, 점 (2, 1)에서의 거리가 1인 직선의 방정식은? (단, x 축은 제외)

① $y = \frac{2}{3}x$

② $y = -\frac{2}{3}x$

③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = -\frac{4}{3}x$

⑤ $y = \frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을

$y = kx (k \neq 0)$ 이라 하면,

(2, 1)에서의 거리가 1 이므로

$$\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1, |2k - 1| = \sqrt{k^2 + 1}, k(3k - 4) = 0$$

$$k = \frac{4}{3} (\because k \neq 0)$$

$$\therefore y = \frac{4}{3}x$$

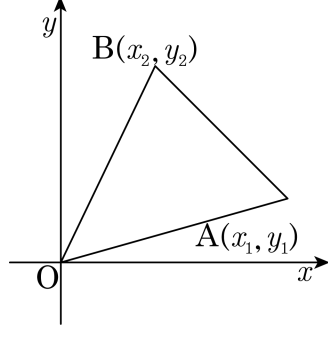
3. O를 원점으로 하는 좌표평면 위의 두 직선 $l_1 : mx - y = 0$, $l_2 : x + my - m - 2 = 0$ 이 있다. 임의의 실수 m 에 대하여 직선 l_2 가 지나가는 정점을 A라 하고, 두 직선 l_1, l_2 의 교점을 P라 할 때, $\triangle OAP$ 의 넓이의 최댓값은?

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

해설

$l_2 : x + my - m - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow x - 2 + m(y - 1) = 0$
따라서 l_2 는 m 의 값에 관계없이
(2,1)을 지난다.
 $l_1 : mx - y = 0$ 은 m 의 값에 관계없이
원점 O를 지나고 또한
 $m \cdot 1 + (-1) \cdot m = 0$ 이므로
 l_1 과 l_2 는 서로 직교한다.
따라서 점 P는 $\overline{OA}$ 를 지름으로 하는
원 위에 존재하고 이 때, 점 P에서
 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 길이의 최댓값은
곧, 반지름의 길이이므로, $\triangle OAP$ 의 최댓값은
$$\triangle OAP \leq \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \frac{\overline{OA}}{2} = \frac{1}{4} \overline{OA}^2 = \frac{5}{4}$$

4. 원점 $O(0, 0)$ 와 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 로 이루어진 삼각형 OAB 의 넓이는?



- ☒ ① $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$
 ☐ ② $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$
 ☐ ③ $\frac{1}{2}|x_1y_1 + x_2y_2|$
☐ ④ $\frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$
 ☐ ⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

해설

$$\begin{aligned}
 \overline{OA} &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\
 \text{직선 } OA \text{의 방정식은 } y &= \frac{y_1}{x_1}x \\
 \therefore y_1x - x_1y &= 0 \\
 \text{점 } B(x_2, y_2) \text{에서} \\
 \text{직선 } y_1x - x_1y &= 0 \text{까지의 거리 } h \text{는} \\
 \frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \text{이다.} \\
 \therefore \triangle OAB &= \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot h \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \\
 &= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|
 \end{aligned}$$

5. 직선 $3x - 4y = 0$ 과 평행이고, 점 $(2, 1)$ 에서의 거리가 1 인 직선의 y 절편은?(단, y 절편은 양수)

- ① $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ ③ $(0, 1)$
④ $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ ⑤ $(0, 3)$

해설

직선 $3x - 4y = 0$ 과 평행한 직선을

$3x - 4y + k = 0$ 이라 놓으면,

$$\frac{|3 \times 2 - 4 \times 1 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

$\therefore |2 + k| = 5, k = 3$ ($\because y$ 절편 > 0)

$\therefore$ 직선 $3x - 4y + 3 = 0$ 의 y 절편은 $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

6. 점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y - 1 + k(2x - y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은?

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설

점과 직선사이 거리 구하는 공식을 이용한다.

$$\frac{|2k + 1 + 2(2 - k) - 1|}{\sqrt{(2k + 1)^2 + (2 - k)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5k^2 + 5}}$$

$\therefore$ 최솟값은 $k = 0$ 일 때, 분모는 $\sqrt{5}$, 즉 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

7. 두 직선 $ax + by + 1 = 0$, $bx + ay + 1 = 0$ 이 서로 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 a 에 대한 식으로 나타내면?

- ① $\frac{\sqrt{1}}{|a|}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{|a|}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{|a|}$ ④ $\frac{2}{|a|}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{|a|}$

해설

두 직선이 평행하면 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \neq \frac{1}{1}$

$\therefore a = -b$ ($\because a \neq b$)

직선 $ax + by + 1 = ax - ay + 1 = 0$ 위의 한 점을

잡으면 $P\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 이므로 직선

$bx + ay + 1 = 0$ 에서 $-ax + ay + 1 = 0$ 까지의

거리는 $\frac{\left|(-a) \cdot 0 + a \cdot \frac{1}{a} + 1\right|}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{|a|}$

8. 다음은 서로 다른 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 넓이 S 가 $S = \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|$ 임을 보이는 과정이다.

선분 AB의 길이

$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 이고, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{(가)}{(나)}$ 이므로, 직선의 방정식은 $y - y_1 = \frac{(가)}{(나)}(x - x_1) \cdots \textcircled{나}$ 이 때, 점 C와 직선 $\textcircled{나}$ 사이의 거리 d 는 $d = \frac{|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|}{\frac{(나)}{(가)}}$ 따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는 $S = \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|$ 이다.

이 과정에서 (가), (나)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은?

(가) (나)

- ① $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$

② $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$

③ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

④ $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

⑤ $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$

해설

(가) $\frac{(y\text{의 증가량})}{(x\text{의 증가량})} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(나) 점 (x_1, y_1) 에서 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는 $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 임을 이용하면 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 이다.