1. 거듭제곱에 대한 설명 중 옳은 것은?

- ① $\sqrt[4]{81} = \pm 3$
- ② $\sqrt[3]{-64} = -8$
- ③ 16의 네제곱근은 ± 2 이다.
- ④ $\sqrt{(-3)^2}$ 의 제곱근은 3이다.
- ⑤ -1은 -1의 세제곱근 중 하나이다.

해설

- ① $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{9^2} = 3$ ∴ 거짓
- ② $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$ ∴ 거짓
- ③ 16의 네제곱근은 $\pm 2, \pm 2i$ 이다. ∴ 거짓
- ④ $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}$ 이다. ∴ 거짓
- ⑤ $(-1)^3 = -1$ 이므로 -1은 -1의 세제곱근 중 하나이다. ∴ 참

2. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 일 때, $a + a^{-1}$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4 \text{ 의 양변을 제곱하면 } (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = 4^2$$

$$a + a^{-1} + 2 = 16$$

$$\therefore a + a^{-1} = 14$$

3. $2^{2x} = 3$ 일 때, $\frac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 2^{3x} 를 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}} &= \frac{(2^x + 2^{-x}) \times 2^{3x}}{(2^{3x} + 2^{-3x}) \times 2^{3x}} \\ &= \frac{2^{4x} + 2^{2x}}{2^{6x} + 1} = \frac{(2^{2x})^2 + 2^{2x}}{(2^{2x})^3 + 1} \\ &= \frac{3^2 + 3}{3^3 + 1} = \frac{3}{7}\end{aligned}$$

4. $a > 0$ 일 때, $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$ 을 간단히 하면?

- ① $\sqrt{a}$ ② $\sqrt[3]{a}$ ③ $\sqrt[3]{a^2}$ ④ $\sqrt[4]{a}$ ⑤ $\sqrt[4]{a}$

해설

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}} = \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[4]{a}} \times \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt[12]{a^2}}{\sqrt[12]{a}} = \sqrt[12]{\frac{a^2}{a}} = \sqrt[6]{\frac{a^2}{a}} = \sqrt[6]{a} = \sqrt[4]{a}$$

5. 세 수 $A = \sqrt[3]{4}$, $B = \sqrt[4]{6}$, $C = \sqrt[6]{13}$ 의 대소를 비교하면?

- ① $A > B > C$ ② $B > A > C$ ③ $C > B > A$
④ $A > C > B$ ⑤ $B > C > A$

해설

$A = \sqrt[3]{4}$, $B = \sqrt[4]{6}$, $C = \sqrt[6]{13}$ 을 거듭 제곱꼴로 고쳤을 때, 밑과 지수가 모두 다르므로
지수를 통일한 다음 밑이 큰 순서로 대소를 비교한다.
3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로
 $A = \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$
 $B = \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$
 $C = \sqrt[6]{13} = \sqrt[12]{13^2} = \sqrt[12]{169}$
 $\therefore A > B > C$

6. $8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값을 2^x 라고 할 때, x 의 값을 구하면?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} 8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} &= 2^4 \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^5 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 5$$

7. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k 의 값을 구하여라. (단, $a > 0, a \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5$ 이므로
 $k = 5$

8. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{3}} \div a^{\frac{2}{3}}$ 을 간단히 하면?

① $a\sqrt[3]{a}$

② $a\sqrt{a}$

③ $\frac{1}{a\sqrt[3]{a^2}}$

④ $\frac{1}{a\sqrt{a}}$

⑤ $\frac{1}{a\sqrt[3]{a}}$

해설

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} &= a^{\frac{3-2-4}{6}} \\ &= a^{-\frac{3}{6}} = a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a\sqrt{a}} \end{aligned}$$

9. $3^x = 5$ 일 때, $(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}}$ 의 값을 구하면?

- ① 3 ② $\sqrt{3}$ ③ 5 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}} = (3^{-4})^{-\frac{x}{4}} = 3^x = 5$$

10. 실수 x, y 에 대하여 $57^x = 27$, $513^y = 81$ 일 때, $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$57^x = 27 = 3^3 \text{에서 } 57 = (3^3)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}} \dots \text{㉠}$$

$$513^y = 81 = 3^4 \text{에서 } 513 = (3^4)^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{4}{y}} \dots \text{㉡}$$

㉠ $\div$ ㉡을 하면

$$\frac{1}{9} = 3^{\frac{3}{x}} \div 3^{\frac{4}{y}} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$3^{-2} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

11. $(7^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}})$ 의 값은?

- ① 2 ② 6 ③ 10 ④ 14 ⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} & (7^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}}) \\ & \{(7^{\frac{1}{4}})^2 - (5^{\frac{1}{4}})^2\} (7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}}) \\ & = (7^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}}) = (7^{\frac{1}{2}})^2 - (5^{\frac{1}{2}})^2 \\ & = 7 - 5 = 2 \end{aligned}$$

12. 다음 중 옳은 것을 고르면?

- ① 8의 세제곱근은 $\sqrt[3]{8}$ 한 개다.
- ② -1의 세제곱근 중 실수는 존재하지 않는다.
- ③ n 이 홀수일 때, 5의 n 제곱근 중 실수인 것은 한 개다.
- ④ n 이 짝수일 때, 16의 n 제곱근 중 실수인 것은 ± 3 이다.
- ⑤ -81의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 3 이다.

해설

$x^n = a$ 인 실수 x 의 개수는 다음과 같다.

(i) n 이 홀수일 때, 실수 x 는 $\sqrt[n]{a}$ 로 1개이다.

(ii) n 이 짝수일 때,

$a > 0 \rightarrow$ 실수 x 는 $\pm\sqrt[n]{a}$ 로 2개이다.

$a = 0 \rightarrow$ 실수 x 는 0이므로 1개이다.

$a < 0 \rightarrow$ 실수 x 는 존재하지 않는다.

① $n = 3$ 이므로 실수인 세제곱근은 1개

② $n = 3$ 이므로 실수인 세제곱근은 1개

③ n 이 홀수이므로 실수인 n 제곱근은 1개

④ n 이 짝수이고 $16 > 0$ 이므로 실수인 n 제곱근은 2개

⑤ $n = 4$ 이고, $-81 < 0$ 이므로 실수인 n 제곱근은 존재하지 않는다.

13. $a > 0$ 일 때, $\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3}$ 을 간단히 하면?

- ① 2 ② $\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt[4]{a^3}$ ④ $\sqrt[4]{a^3}$ ⑤ $\sqrt[4]{4a^3}$

해설

$$\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3} = (2^4 a^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} \div a^{\frac{3}{8}} = 2a^{\frac{3}{8}-\frac{3}{8}} = 2a^0 = 2$$

14. 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① -2는 -16의 네제곱근이다.
- ② 4는 16의 세제곱근이다.
- ③ 8의 세제곱근은 2뿐이다.
- ④ 81의 네제곱근은 3, -3이다.
- ⑤ -4는 -64의 세제곱근이다.

해설

- ① $(-2)^4 = 16 \neq -16$ 이므로 -2는 -16의 네제곱근이 아니다.
- ② $4^3 = 64 \neq 16$ 이므로 4는 16의 세제곱근이 아니다.
- ③ 8의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = 8$ 이므로
 $x^3 - 8 = 0$
 $(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{3}i$
따라서, 8의 세제곱근은 2 외에도 $-1 + \sqrt{3}i$, $-1 - \sqrt{3}i$ 가 있다.
- ④ 81의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 81$ 이므로
 $x^4 - 81 = 0$
 $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$
 $(x+3)(x-3)(x^2 + 9) = 0$
 $\therefore x = \pm 3$ 또는 $x = \pm 3i$
따라서, 81의 네제곱근은 3, -3 외에도 $3i$, $-3i$ 가 있다.
- ⑤ $(-4)^3 = -64$ 이므로 -4는 -64의 세제곱근이다.

15. -8 의 제곱근 중에서 실수를 a , 16 의 제곱근 중에서 실수를 b 라 할 때, $a + b^2$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$$a = -2$$

$$b = 2 \text{ or } -2$$

$$a + b^2 = -2 + 4 = 2$$

16. $(\sqrt[5]{2})^4 \times \sqrt[5]{64}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ $\sqrt[5]{128}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt[5]{512}$

해설

$$2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{6}{5}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$$

17. $\sqrt[3]{9^4} \div \sqrt{3^3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{3}}$ 의 값을 구하면?

- ① 9 ② 3 ③ $\sqrt{3}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{9^4} \div \sqrt{3^3} \times \sqrt[6]{\frac{1}{3}} &= (3^2)^{\frac{4}{3}} \div 3^{\frac{3}{2}} \times (3^{-1})^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{8}{3} - \frac{3}{2} - \frac{1}{6}} \\ &= 3\end{aligned}$$

18. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$ 을 간단히 하면?

- ① $\sqrt[6]{a}$ ② $\sqrt[6]{b}$ ③ $\sqrt[6]{ab}$ ④ $\sqrt[6]{a^2b}$ ⑤ $\sqrt[6]{ab^2}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3} \\ &= (a^2b^3)^{\frac{1}{6}} \times (ab)^{\frac{1}{2}} \div (a^2b^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{2}{3}}b = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1} \\ &= a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a} \end{aligned}$$

19. 양수 a 에 대하여 $(a^{2\sqrt{3}})^{\sqrt{2}} \div (a^{-\sqrt{54}})$ 를 간단히 하면?

- ① $a^{\sqrt{\frac{2}{3}}}$ ② $a^{\sqrt{2}}$ ③ $a^{-\sqrt{16}}$ ④ $a^{5\sqrt{6}}$ ⑤ a^{36}

해설

지수를 따로 써 보면

$$2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{54} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$$

$$= 5\sqrt{6}$$

$$\therefore a^{5\sqrt{6}}$$

20. $\sqrt[3]{a} = 81$, $\sqrt{\sqrt{b}} = 125$ 일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 225

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a} = 81 = 3^4 \text{ 에서 } a &= 3^{12} \\ \sqrt{\sqrt{b}} = 125, \sqrt[4]{b} = 5^3 \therefore b &= 5^{12} \\ \text{이때, } ab &= 3^{12} \cdot 5^{12} = 15^{12} \\ \therefore \sqrt[3]{\sqrt{ab}} &= \sqrt[6]{ab} = \sqrt[6]{15^{12}} \\ &= 15^{\frac{12}{6}} = 15^2 = 225\end{aligned}$$