

1. 점 P(1, 2) 에서 직선 $2x + y - 3 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

(PH 의 길이)

= (점 P(1, 2) 와 직선 $2x + y - 3 = 0$ 과의 거리)

$$\therefore \overline{PH} = \frac{|2 + 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

2. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\frac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$

$\therefore k = 0$

이때, $x = 1, y = 1$ 이므로
구하는 점은 $(1, 1)$

$\therefore a = 1, b = 1$

$\therefore a + b = 2$

3. 원점에서 직선 $ax + by + 4 = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

① 4

② 8

③ $3\sqrt{2}$

④ 4

⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원점 $(0, 0)$ 에서 직선 $ax + by + 4 = 0$ 까지의
거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a \times 0 + b \times 0 + 4|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}$$

$$4 = \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow 2(a^2 + b^2) = 16$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 8$$

4. 원점에서의 거리가 1 이고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식이 $ax + by + c = 0$ 으로 표현될 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면? (단, $b \neq 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 $(1, 2)$ 를 지나는 직선은
 $y = m(x - 1) + 2$ 에서,
 $mx - y - m + 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$
여기서 $(0, 0)$ 에 이르는 거리가 1 이므로
 $\frac{|-m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1, |m - 2| = \sqrt{m^2 + 1}$
양변을 제곱하여 정리하면, $m = \frac{3}{4}$
 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면, $\frac{3}{4}x - y + \frac{5}{4} = 0,$
 $3x - 4y + 5 = 0$
 $\therefore a + b + c = 3 - 4 + 5 = 4$

5. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x - y - 3 + k(x + y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x - y - 3 + k(x + y) = 0$ 에서
 $(k + 1)x + (k - 1)y - 3 = 0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$f(k) = \frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2 + (k-1)^2}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2(k^2 + 1)}}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때

최대가 되므로 $f(k)$ 의 최댓값은

$$k = 0 \text{ 일 때 } \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

6. 좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A(4, 3)$, $B(2, 6)$ 을 꼭지점으로 하는 삼각형 OAB 의 무게중심을 G 라 할 때, 점 G 와 직선 OA 사이의 거리는?

- ① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

해설

삼각형 OAB 의 무게중심은 $G(2, 3)$, 직선 OA 의 방정식은 $y = \frac{3}{4}x$ 곧 $3x - 4y = 0$ 이다.

따라서 점 G 와 직선 OA 의 거리 d 는

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{5}$$

7. 두 직선 $3x - 2y + 1 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$ 사이의 거리를 구하면?

① $\frac{\sqrt{13}}{13}$
④ $\frac{6\sqrt{13}}{5}$

② $\frac{3\sqrt{13}}{13}$
⑤ $\frac{7\sqrt{13}}{5}$

③ $\frac{5\sqrt{13}}{13}$

해설

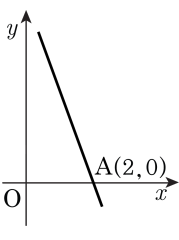
두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점에서 나머지 직선까지의 거리를 구하면 된다.

ex) $3x - 2y + 1 = 0$ 의 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

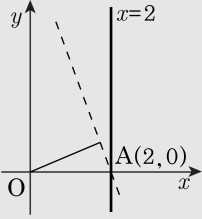
$$\Rightarrow \frac{|-2 \times \frac{1}{2} - 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$$

8. 점 $A(2,0)$ 을 지나는 임의의 직선 l 에 대하여 원점 O 와 직선 l 사이의 거리의 최댓값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ $2\sqrt{2}$
- ④ $\sqrt{5}$
- ⑤ 4



해설



다음의 그림에서 점 $A(2,0)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선 l , 곧 직선 $x=2$ 에 대하여 원점 O 와 l 사이의 거리가 최대가 되며 이 때 그 거리는 2 이다

9. 세 직선 $x + 2y - 2 = 0$, $3x - y - 6 = 0$, $2x - 3y + 3 = 0$ 에 의하여 만들어지는 삼각형의 넓이는?

- ① $\frac{5}{2}$
- ② 3
- ③ $\frac{7}{2}$
- ④ 4
- ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

$$\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \cdots \textcircled{A} \\ 3x - y - 6 = 0 \cdots \textcircled{B} \\ 2x - 3y + 3 = 0 \cdots \textcircled{C} \end{cases}$$

③과 ㉠, ㉠과 ㉡, ㉡과 ㉢의 교점을 각각 A, B, C라 하고 교점을 구한다.

(i) ㉠ + ㉡ $\times 2$ 에서 $x = 2, y = 0$.

$\therefore A = (2, 0)$

(ii) ㉠ $\times 2 -$ ㉢에서 $x = 0, y = 1$.

$\therefore B = (0, 1)$

(iii) ㉡ $\times 3 -$ ㉢에서 $x = 3, y = 3$.

$\therefore C = (3, 3)$

$\overline{BC}$ 를 밑변으로 하면,

밑변의 길이는 $\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

높이는 A와 ㉢ 사이의 거리이므로

$$\text{삼각형의 넓이는 } \frac{|4 - 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{의 넓이는 } \frac{1}{2} \sqrt{13} \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7}{2}$$

10. 꼭짓점의 좌표가 A(0, 0), B(36, 15), C(a, b)인 삼각형 ABC가 있다.

a, b가 정수일 때, △ABC의 넓이의 최소는?

- ① $\frac{1}{2}$
- ② 1
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ $\frac{13}{2}$
- ⑤ 최솟값은 없다

해설

직선 $\overline{AB}$ 의 방정식은 $5x - 12y = 0$

△ABC의 높이 h 는

$$h = \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

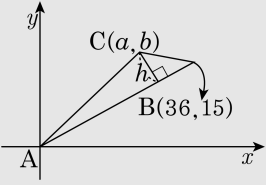
△ABC의 넓이 S는 $S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{12^2 + 5^2} \cdot \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{3}{2} |5a - 12b|$$

a, b는 정수이므로, $|5a - 12b| = 1$ 일 때,

S의 최소는 $\frac{3}{2}$

실제로 $(a, b) = (5, 2)$ 또는 $(7, 3)$ 일 때이다.



11. 직선 $(k-3)x + (k-1)y + 2 = 0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점과 직선 $x + 2y - 4 = 0$ 사이의 거리는?

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$(k-3)x + (k-1)y + 2 = 0$ 을 k 에 대하여
정리하면 $k(x+y) + (-3x-y+2) = 0$ 이 식이
 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
 $x+y=0$, $-3x-y+2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-1$
따라서 점 $(1, -1)$ 과 직선 $x+2y-4=0$
사이의 거리는
$$\frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

12. 좌표평면 위의 점 A(-1, 0) 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 B(0, 2) 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

- ㉠ $-\frac{1}{2}$ ㉡ $-\frac{1}{3}$ ㉢ $\frac{1}{3}$ ㉣ $\frac{1}{2}$ ㉤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y = m(x + 1)$

$$\therefore mx - y + m = 0$$

점 B(0, 2) 에서

$$\text{직선 } l \text{ 까지의 거리는 } \frac{|-2 + m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$

$$(2m + 1)^2 = 0$$

$$\therefore m = -\frac{1}{2}$$

13. 원점 $O(0, 0)$ 에서 직선 $(k+1)x + (k+2)y + 3 = 0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2

② 3

③ $2\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{3}$

⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2 + (k+2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2k^2 + 6k + 5}}$$

$$\leq \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2}$$

$$(\because \sqrt{2k^2 + 6k + 5})$$

$$= \sqrt{2\left(k + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$

14. 좌표평면 위의 직선 $l : 2x - 3y + 2 = 0$ 에 대하여 다음 세 조건을 만족시키는 직선 l' 의 방정식은?

- i. l 과 l' 은 만나지 않는다.

ii. 직선 l 에 수직인 직선이 l, l' 과 만나는 점을 각각 A, B 라고 하면 $AB = \sqrt{13}$ 이다.

iii. l' 의 y 절편은 l 의 y 절편보다 작다.

- ① $2x - 3y + 15 = 0$

② $2x - 3y - 13 = 0$

③ $2x - 3y - 11 = 0$

④ $3x + 2y + 11 = 0$

⑤ $3x + 2y + 13 = 0$

해설

- i. l 과 l' 은 만나지 않으므로 서로 평행하다.
서로 평행하면 기울기가 같으므로
 $l' : 2x - 3y + c = 0$ 으로 놓을 수 있다.

ii. $AB = \sqrt{13}$ 은
평행한 두 직선 l 과 l' 사이의 거리가 $\sqrt{13}$ 임을 뜻하므로
직선 l 위의 한 점 $(-1, 0)$ 에서 직선 l' 에 이르는 거리가 $\sqrt{13}$ 이다.
$$\text{즉, } \frac{|-2 + c|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13}, |-2 + c| = 13$$
$$-2 + c = \pm 13 \quad \therefore c = 15 \text{ 또는 } c = -11$$
$$\therefore l' : 2x - 3y + 15 = 0 \text{ 또는 } l' : 2x - 3y - 11 = 0$$

iii. l' 의 y 절편 $5, -\frac{11}{3}$ 중에서
 l 의 y 절편 $\frac{2}{3}$ 보다 작은 것은
 $-\frac{11}{3}$ 이므로 구하는 직선
 l' 의 방정식은 $l' : 2x - 3y - 11 = 0$

15. $\triangle ABC$ 의 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 각각 $P(3, 4)$, $Q(4, -1)$, $R(6, 1)$ 이라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?

- ① 18
- ② 24
- ③ 30
- ④ 32
- ⑤ 36

해설

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 로 놓으면
 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점은 각각
 $P(3, 4)$, $Q(4, -1)$, $R(6, 1)$ 이므로
이것을 풀면, $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 7$
 $y_1 = 6$, $y_2 = 2$, $y_3 = -4$
 $\therefore \triangle ABC =$
 $\frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$
 $= \frac{1}{2}|5(2 - (-4)) + 1((-4) - 6) + 7(6 - 2)|$
 $= 24$

해설

$\triangle ABC$ 의 넓이는 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의
중점을 이어 만든 $\triangle PQR$ 의 넓이의
4배임을 이용한다.