1. 점 $P(1, 2)$ 에서 직선 $2x+y-3=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

($\overline{\mathrm{PH}}$ 의 길이)

= (점 $P(1,\ 2)$ 와 직선 $2x+y-3=0$ 과의 거리)

$$\therefore \quad \overline{\mathrm{PH}} = \frac{|2+2-3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

2. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\dfrac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$

$\therefore\ k = 0$

이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로
구하는 점은 $(1,\ 1)$

$\therefore\ a = 1,\ b = 1$

$\therefore\ a + b = 2$

3. 원점에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 4 ② 8 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원점 (0, 0) 에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a\times 0+b\times 0+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$$4=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\rightarrow 2(a^2+b^2)=16$$

$$\therefore\ a^2+b^2=8$$

4. 원점에서의 거리가 1이고, 점 $(1,2)$를 지나는 직선의 방정식이 $ax+by+c=0$으로 표현될 때, $a+b+c$의 값을 구하면? (단, $b \neq 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 $(1,2)$를 지나는 직선은

$y=m(x-1)+2$ 에서,

$mx-y-m+2=0 \cdots$ ㉠

여기서 $(0,0)$에 이르는 거리가 1이므로

$\dfrac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ |m-2|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면, $m=\dfrac{3}{4}$

㉠에 대입하여 정리하면, $\dfrac{3}{4}x-y+\dfrac{5}{4}=0,$

$3x-4y+5=0$

$\therefore\ a+b+c=3-4+5=4$

5. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}$　③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$　④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서

$(k+1)x+(k-1)y-3=0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때 최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

6. 좌표평면 위의 세 점 O(0, 0), A(4, 3), B(2, 6) 을 꼭지점으로 하는 삼각형 OAB 의 무게중심을 G 라 할 때, 점 G 와 직선 OA 사이의 거리는?

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

해설

삼각형 OAB 의 무게중심은 G(2,3) , 직선 OA 의 방정식은

$y = \frac{3}{4}x$ 곧 $3x - 4y = 0$ 이다.

따라서 점 G 와 직선 OA 의 거리 d 는

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{5}$$

7. 두 직선 $3x-2y+1=0,\ 3x-2y-4=0$ 사이의 거리를 구하면?

① $\frac{\sqrt{13}}{13}$ ② $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ ③ $\frac{5\sqrt{13}}{13}$
④ $\frac{6\sqrt{13}}{5}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{13}}{5}$

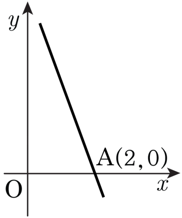
해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점에서 나머지 직선까지의 거리를 구하면 된다.

$ex)3x-2y+1=0$의 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\left|-2\times\frac{1}{2}-4\right|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{13}$$

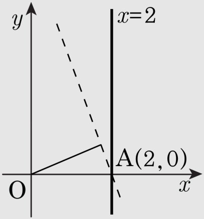
8. 점 $A(2, 0)$ 을 지나는 임의의 직선 l 에 대하여 원점 O 와 직선 l 사이의 거리의 최댓값은?



① 2　　② 3　　③ $2\sqrt{2}$

④ $\sqrt{5}$　　⑤ 4

해설



다음의 그림에서 점 $A(2, 0)$ 을 지나고
y 축에 평행한 직선 l , 곧 직선 $x = 2$ 에 대하여
원점 O 와l 사이의 거리가 최대가 되며
이 때 그 거리는 2 이다

9. 세 직선 $x+2y-2=0$, $3x-y-6=0$, $2x-3y+3=0$에 의해서 만들어지는 삼각형의 넓이는?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

$$\begin{cases} x+2y-2=0 \cdots ㉠ \\ 3x-y-6=0 \cdots ㉡ \\ 2x-3y+3=0 \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠과 ㉡, ㉠과 ㉢, ㉡과 ㉢의 교점을 각각
A, B, C라 하고 교점을 구한다.
(i) ㉠ + ㉡ × 2에서 $x=2, y=0$.
$\therefore \mathrm{A}=(2,0)$
(ii) ㉠ × 2 − ㉢에서 $x=0, y=1$.
$\therefore \mathrm{B}=(0,1)$
(iii) ㉡ × 3 − ㉢에서 $x=3, y=3$.
$\therefore \mathrm{C}=(3,3)$
$\overline{\mathrm{BC}}$를 밑변으로 하면,
밑변의 길이는 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$
높이는 A와 ㉢ 사이의 거리이므로
삼각형의 높이는 $\frac{|4-0+3|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{7}{\sqrt{13}}$
$\therefore \triangle\mathrm{ABC}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\sqrt{13}\,\frac{7}{\sqrt{13}}=\frac{7}{2}$

10. 꼭짓점의 좌표가 A(0, 0), B(36, 15), C(a, b)인 삼각형 ABC가 있다. a, b가 정수일 때, △ABC의 넓이의 최소는?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 최솟값은 없다

해설

직선 $\overline{\mathrm{AB}}$의 방정식은 $5x - 12y = 0$

△ABC의 높이 h는

$$h = \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

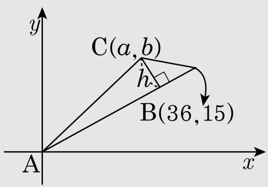
△ABC의 넓이 S는 $\mathrm{S} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AB}} \cdot \mathrm{h}$

$$= \frac{1}{2} 3\sqrt{12^2 + 5^2} \cdot \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{3}{2}|5a - 12b|$$

a, b는 정수이므로, $|5a - 12b| = 1$일 때,

S의 최소는 $\frac{3}{2}$

실제로 $(a, b) = (5, 2)$ 또는 $(7, 3)$일 때이다.



11. 직선 $(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점과 직선 $x+2y-4=0$ 사이의 거리는?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 을 k 에 대하여 정리하면 $k(x+y)+(-3x-y+2)=0$ 이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x+y=0$, $-3x-y+2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-1$

따라서 점 $(1,\ -1)$ 과 직선 $x+2y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot 1+2\cdot(-1)-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

12. 좌표평면 위의 점 A$(-1,\ 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 B$(0,\ 2)$ 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y=m(x+1)$

$\therefore\ mx-y+m=0$

점 B$(0,\ 2)$ 에서

직선 l 까지의 거리는 $\dfrac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2+4m+1=0$

$(2m+1)^2=0$

$\therefore\ m=-\dfrac{1}{2}$

13. 원점 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $(k+1)x+(k+2)y+3=0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2　　② 3　　③ $2\sqrt{2}$　　④ $2\sqrt{3}$　　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2k^2+6k+5}}$$

$$\le \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{2}$$

$(\because\ \sqrt{2k^2+6k+5}$

$$=\sqrt{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\ge\sqrt{\frac{1}{2}})$$

14. 좌표평면 위의 직선 $l : 2x-3y+2=0$ 에 대하여 다음 세 조건을 만족시키는 직선 l' 의 방정식은?

i. l 과 l' 은 만나지 않는다. ii. 직선 l 에 수직인 직선이 l , l' 과 만나는 점을 각각 A, B 라고 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$ 이다. iii. l' 의 y 절편은 l 의 y 절편보다 작다.

① $2x-3y+15=0$
② $2x-3y-13=0$
③ $2x-3y-11=0$
④ $3x+2y+11=0$
⑤ $3x+2y+13=0$

해설

i. l 과 l' 은 만나지 않으므로 서로 평행하다.
서로 평행하면 기울기가 같으므로
$l' : 2x-3y+c=0$ 으로 놓을 수 있다.

ii. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$ 은
평행한 두 직선 l 과 l' 사이의 거리가 $\sqrt{13}$ 임을 뜻하므로
직선 l 위의 한 점 $(-1,\ 0)$ 에서 직선 l' 에 이르는 거리가 $\sqrt{13}$ 이다.

즉, $\dfrac{|-2+c|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\sqrt{13}$, $|-2+c|=13$

$-2+c=\pm 13 \quad \therefore\ c=15$ 또는 $c=-11$

$\therefore\ l' : 2x-3y+15=0$ 또는 $l' : 2x-3y-11=0$

iii. l' 의 y 절편 $5,\ -\dfrac{11}{3}$ 중에서

l 의 y 절편 $\dfrac{2}{3}$ 보다 작은 것은

$-\dfrac{11}{3}$ 이므로 구하는 직선

l' 의 방정식은 $l' : 2x-3y-11=0$

15. $\triangle ABC$ 의 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 각각 P(3, 4), Q(4, −1), R(6, 1) 이라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?

① 18　　② 24　　③ 30　　④ 32　　⑤ 36

해설

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 로 놓으면
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점은 각각
P(3, 4), Q(4, −1), R(6, 1) 이므로
이것을 풀면, $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 7$
$y_1 = 6$, $y_2 = 2$, $y_3 = -4$
$\therefore \triangle ABC =$

$$\frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

$$= \frac{1}{2}|5(2+4) + (-4-6) + 7(6-2)|$$

$$= 24$$

해설

$\triangle ABC$ 의 넓이는 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 이어 만든 $\triangle PQR$ 의 넓이의 4 배임을 이용한다.