1. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x = y$　② $xy > 0$　③ $xy \ge 0$

④ $x \ge 0,\ y \ge 0$　⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y| = |x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy = |xy|$

(i) $xy = |xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$

(ii) 또 $xy > 0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy = |xy|$

(i), (ii) 에서

$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

2. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$
$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$
$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2 \leq 14(a+b+c)=14^2$
이 때 $a \geq 0,\ b \geq 0, c \geq 0$이므로
$0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$
따라서 최댓값은 14이다.

3. 다음 중에서 p 는 q 이기 위한 충분조건이 <u>아닌</u> 것은? (단 a, b, c 는 실수)

① $p : a = b,\ q : ac = bc$

② $p : a^2 + b^2 = 0,\ q : a = 0$또는$b = 0$

③ $p : \triangle\mathrm{ABC}$ 는 이등변삼각형, $q : \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$

④ $p : a = 1,\ q : a^2 - 3a + 2 = 0$

⑤ $p : 0 < a < b,\ q : a^2 < b^2$

해설

① $q\ :\ ac = bc\ \rightarrow\ a = b$ 또는 $c = 0$ (참)
② $a \neq 0$ 그리고 $b \neq 0 \rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$(참)
③ $\angle\mathrm{B} \neq \angle\mathrm{C} \rightarrow \triangle\mathrm{ABC}$는 이등변 삼각형이 아니다. (거짓)
반례 : $\angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{A}$ 인 이등변 삼각형
④ $q\ :\ a = 1,\ 2$ (참)
⑤ $(0 < a < b) \subset (a^2 < b^2 \Leftrightarrow 0 < a < b$ 또는 $b < a < 0)$

4. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P - Q = \varnothing$ 이면 다음 중 항상 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
③ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
④ p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.
⑤ p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$P - Q = \varnothing$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

5. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore\ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore\ M=10,\ m=-10$

$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$

6. 두 조건 $p : |x^2 - 1| < 1$, $q : |x - 1| < a$ 에 대하여 p 가 q 의 필요조건이 되도록 하는 a 의 최댓값은?

① $2 - \sqrt{2}$ ② $\sqrt{2} - 1$ ③ $\sqrt{2} + 1$

④ $\sqrt{2} + 2$ ⑤ $\sqrt{3} - 1$

해설

$p : |x^2 - 1| < 1$를 만족하는 해를 구하면

$-1 < x^2 - 1 < 1 \leftrightarrow 0 < x^2 < 2 \leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$\therefore P = \{x | -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$

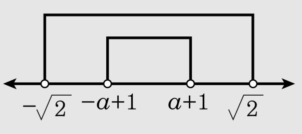
$q : |x - 1| < a$를 만족하는 해를 구하면

$-a < x - 1 < a \leftrightarrow -a + 1 < x < a + 1$

$\therefore\ Q = \{x | -a + 1 \le x \le a + 1\}$

p 가 q 의 필요조건이 되려면 $q \Rightarrow p$

즉 $Q \subset P$가 되어야 한다. 수직선을 그려보면



$-a + 1 \ge -\sqrt{2}$이고, $a + 1 \le \sqrt{2}$, 이를 각각 풀면

$a \le \sqrt{2} + 1$이고 $a \le \sqrt{2} - 1$ 이고 동시에 만족하는 a의 범위는$a \le \sqrt{2} - 1$

$\therefore\ a$의 최댓값은 $\sqrt{2} - 1$

7. 실수 $a,\ b,\ c$ 가 $a^2+b^2+c^2=1$ 을 만족한다. $ab+bc+ca$ 의 최대값, 최소값을 각각 $M,\ m$ 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{2}$　③ -1　④ 1　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$a,\ b,\ c$ 가 실수이므로 $(a+b+c)^2 \geq 0$

$\therefore a^2+b^2+c^2 \geq -2(ab+bc+ca) \cdots$ ㉠

또한 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \leq ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$

$a^2+b^2+c^2=1$ 이므로

$-\frac{1}{2} \leq ab+bc+ca \leq 1$

$\therefore M=1,\ m=-\frac{1}{2}$

$\therefore M+m=\frac{1}{2}$