

1. 원 $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$ 의 중심의 좌표를 (a, b) 반지름의 길이를 r 라 할 때, $a + b + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면

$$(x^2 - 10x + 25) + (y^2 - 2y + 1) = 25$$

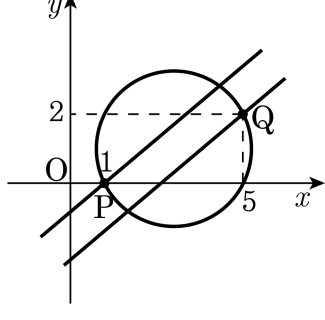
$$\therefore (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$$

따라서 중심의 좌표는 $(a, b) = (5, 1)$

반지름의 길이는 $r = 5$ 이므로

$$a + b + r = 5 + 1 + 5 = 11$$

2. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3 등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 (1, 0), (5, 2)이고, 원의 반지름의 길이가 r 일 때, r^2 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로
그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.

따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{PQ}$ 의 중점 C(3, 1)이므로,

$$r^2 = \overline{PC}^2 = (3 - 1)^2 + (1 - 0)^2 = 5 \text{ 이다.}$$

3. 세 점 (1, 1), (2, -1), (3, 2)를 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 이라 할 때 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

구하는 원의 방정식을
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \dots\dots \textcircled{\text{A}}$ 이라 하면
 $\textcircled{\text{A}}$ 는 점 (1, 1), (2, -1), (3, 2)를 지나므로
 $1 + 1 + A + B + C = 0, 4 + 1 + 2A - B + C = 0,$
 $9 + 4 + 3A + 2B + C = 0$
 $\therefore A = -5, B = -1, C = 4$
 $\therefore x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$
 $\therefore A \times B \times C = 20$

4. 두 원 $(x-2)^2 + y^2 = 10$, $x^2 + y^2 + y - 5 = 0$ 의 공통현을 포함하는 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$(x-2)^2 + y^2 = 10$ 에서

$x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ 이므로

두 원의 공통현을 포함하는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x - 6 - (x^2 + y^2 + y - 5) = 0$$

$$4x + y + 1 = 0, y = -4x - 1$$

$$\therefore a = -4, b = -1$$

$$\therefore a + b = -4 + (-1) = -5$$

5. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2

② $2\sqrt{2}$

③ 3

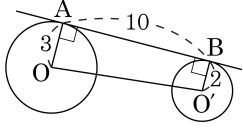
④ $2\sqrt{3}$

⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인
원의 방정식은 $\therefore (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$
이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 $(0 - a)^2 + (-3 - 1)^2 = 25$
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

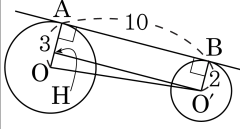
6. 다음 그림의 두 원 O, O' 에서 공통접선 AB 의 길이가 10 이고, 두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 2 일 때, 두 원의 중심거리는?



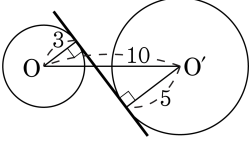
- ① $\sqrt{101}$ ② $\sqrt{103}$ ③ $\sqrt{105}$ ④ $\sqrt{106}$ ⑤ $\sqrt{107}$

해설

중심 O' 에서 선분 AO 에 내린
수선의 발을 H 라 하면,
직각삼각형 $OO'H$ 에서
 $OO' = \sqrt{10^2 + (3-2)^2} = \sqrt{101}$



7. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

8. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

9. 직선 $y = -2x + a$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a 의 값은 ?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 (2, 1)을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로

$$a = 2 \times 2 + 1 = 5$$

10. 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $2x + 3y + 13 = 0$

② $2x + 3y - 13 = 0$

③ $3x + 2y + 13 = 0$

④ $3x + 2y - 13 = 0$

⑤ $3x - 2y - 13 = 0$

해설

$(2, 3)$ 이 원 위의 점이므로

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 13$$

$$\therefore 2x + 3y - 13 = 0$$

11. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

- ① $y = x \pm \sqrt{5}$ ② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$ ③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$
④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$ ⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 3\sqrt{1+2^2} \leftarrow m=2, r=3$$

$$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$$

12. 원 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ 위의 점 C에서 두 점 A(6, -4), B(10, 0)을 지나는 직선 l 에 이르는 거리의 최댓값은?

① $5 + 4\sqrt{2}$

② $5 + \frac{9}{2}\sqrt{2}$

③ $10 + \sqrt{2}$

④ 11

⑤ 12

해설

직선 AB의 방정식은

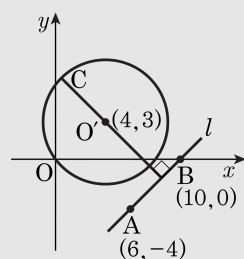
기울기가 $m = \frac{-4-0}{6-10} = 1$ 이므로

$y = x - 10$ 즉, $x - y - 10 = 0$ 이고

원의 중심 (4, 3)에서 직선 AB에 이르는 거리는

$$\frac{|4-3-10|}{\sqrt{1+1}} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로 원 위의 점 C에서}$$

직선 l 에 이르는 거리의 최댓값은 $\frac{9\sqrt{2}}{2} + 5$ 이다.



13. 점 A(2, 4)와 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

- ① $\frac{\pi}{2}$
- ② π
- ③ $\frac{3}{2}\pi$
- ④ 2π
- ⑤ 3π

해설

원 위의 점을 $P(a, b)$, 선분 AP의 중점을 $Q(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{2+a}{2}, y = \frac{4+b}{2}$$
$$\therefore a = 2(x-1), b = 2(y-2) \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

이 때 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 - 4a - 2b + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4(x-1)^2 + 4(y-2)^2 - 8(x-1) - 4(y-2) + 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 5y + \frac{37}{4} = 0$$
$$\therefore (x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 1$$

따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ 이고, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$$2\pi \doteq 2\pi$$

14. 직선 $ax + by + 2 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하면서 움직일 때, 점 (a, b) 가 그리는 자취의 길이를 구하면?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

직선이 원에 접하므로 원의 중심과 직선 사이
거리는 원의 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|a \times 0 + b \times 0 + 2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4$$

$\therefore$ 점 (a, b) 가 그리는 자취길이는

$$2 \times 2 \times \pi = 4\pi$$

15. A(3, -1)에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $x - 2y - 6 = 0, 2x + y - 4 = 0$

② $x - 2y - 5 = 0, 2x + y - 5 = 0$

③ $x - 2y - 4 = 0, 2x + y - 5 = 0$

④ $x - 2y - 3 = 0, 2x + y - 4 = 0$

⑤ $x - 2y - 2 = 0, 2x + y - 3 = 0$

해설

점 A를 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면, $y = m(x - 3) - 1$ 접선이므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}, -2$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -2x + 5 \text{ 이므로}$$

접선의 방정식은 $x - 2y - 5 = 0$ or $2x + y - 5 = 0$