

1. 다항식 $f(x)$ 를 $2x^2 + 3x + 2$ 로 나누었더니 몫이 $3x - 4$ 이고, 나머지가 $2x + 5$ 이었다. 이 때, $f(1)$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 + 3x + 2)(3x - 4) + (2x + 5) \\ &= 6x^3 + 9x^2 + 6x - 8x^2 - 12x - 8 + 2x + 5 \\ &= 6x^3 + x^2 - 4x - 3 \\ \therefore f(1) &= 6 + 1 - 4 - 3 = 0 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 + 3x + 2)(3x - 4) + (2x + 5) \\ f(1) &= (2 + 3 + 2)(3 - 4) + (2 + 5) = -7 + 7 = 0 \end{aligned}$$

2. 다음 세 다항식에서 최대공약수를 구하면?

$2x^2-3x+1, \quad 3x^2-x-2, \quad x^2+3x-4$

- ① $x-1$

② $2x-1$

③ $x-2$

④ $x+3$

⑤ $x+1$

해설

$2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)$ $3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$ $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$ 따라서 최대 공약수는 $x-1$ 이다.

3. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 의 모든 실근의 곱은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 치환하면
 $t^2 + 3t - 10 = 0, (t + 5)(t - 2) = 0$
 $\therefore t = -5$ 또는 $t = 2$
 $\therefore x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

4. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이 되도록 유리수 p, q 를 정할 때, $p + q$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면,
그 켤레근인 $2 - \sqrt{3}$ 도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
 $-p = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$
 $\therefore p = -4$
 $q = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$
 $\therefore q = 1$
 $\therefore p + q = -4 + 1 = -3$

5. 이차함수 $y = -(x-2)(x+6)$ 의 최댓값을 a 라 하고 , 그 때의 x 의 값을 b 라 할 때, $a+b$ 을 값을 구하면?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$y = -(x-2)(x+6)$$

$$y = -(x^2 + 4x - 12)$$

$$y = -(x+2)^2 + 16$$

$x = -2$ 일 때, 최댓값 16 을 가지며 최솟값은 없다.

$a = 16$, $b = -2$ 이므로 $a+b = 14$ 이다.

6. m 이 실수일 때, x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2mx + 2m^2 - 2m - 3 = 0$ 의 두 실근 α, β 에 대하여 $\alpha\beta$ 의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^2 + 2mx + 2m^2 - 2m - 3 = 0$ 이 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = m^2 - (2m^2 - 2m - 3) \geq 0$$

$$m^2 - 2m - 3 \leq 0, (m+1)(m-3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq m \leq 3$$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta = 2m^2 - 2m - 3 = 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}$$

이 때, $-1 \leq m \leq 3$ 이므로 $m = 3$ 일 때

$\alpha\beta$ 의 최댓값은 9이다.

7. 삼차방정식 $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 α 라 할 때, 옳은 내용을 모두 고르면?(단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

① $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$

② $\alpha + \bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha} = -1$

③ $\alpha^3 + \bar{\alpha}^3 = \alpha^2 + \bar{\alpha}^2$

④ $\frac{\alpha+1}{\alpha^2} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2+1} = 2$

⑤ $\alpha^2\bar{\alpha} + \alpha\bar{\alpha}^2 = 1$

해설

$$x^3 = -1, (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\alpha^3 = \bar{\alpha}^3 = -1,$$

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = \bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha} + 1 = 0$$

$$\alpha + \bar{\alpha} = 1,$$

$$\alpha\bar{\alpha} = 1$$

$$\textcircled{1} \alpha^2 + \alpha + 1 = 0(\bigcirc)$$

$$\textcircled{2} \alpha + \bar{\alpha} = 1(\times)$$

$$\textcircled{3} \alpha^3 + \bar{\alpha}^3 = -1 - 1 = -2$$

$$\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 = (\alpha + \bar{\alpha})^2 - 2 = -1(\times)$$

$$\textcircled{4} \frac{\alpha+1}{\alpha^2} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2+1}$$

$$= \frac{\alpha+1}{1-\alpha} + \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$$

$$= \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + 1 = \frac{2}{1-\alpha}(\times)$$

$$\textcircled{5} \alpha^2\bar{\alpha} + \alpha\bar{\alpha}^2$$

$$= \alpha\bar{\alpha}(\alpha + \bar{\alpha}) = 1(\bigcirc)$$

8. 200m운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

- ① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h
④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
 $3x - 3y = 200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
 $x + y = 200$
$$\begin{cases} 3x - 3y = 200 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x = \frac{400}{3}$ m/분
 $\Rightarrow \frac{400\text{m}}{3} / \text{분} = \frac{0.4\text{km}}{3} \times 60 / \text{시간} = 8 \text{ km/h}$

9. 자연수 n 에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x 가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned}x &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^2 \right\}^n + \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^2 \right\}^n \\&= \left(\frac{2}{2i} \right)^n + \left(\frac{2}{-2i} \right)^n \\&= \left(\frac{1}{i} \right)^n + \left(-\frac{1}{i} \right)^n = (-i)^n + i^n\end{aligned}$$

i^n 은 $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1 + 1 = 2$

(ii) $n = 4k+1$ 이면 $x = -i + i = 0$

(iii) $n = 4k+2$ 이면 $x = -1 - 1 = -2$

(iv) $n = 4k+3$ 이면 $x = i - i = 0$

$\therefore x = 2, 0, -2$

따라서, x 가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

10. 방정식 $x^2+x+2=0$ 의 한 해근을 ω 라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a \neq 0)$ 에 대하여 $f(\omega)=3\omega$ 를 만족한다. 이 때, 실수 a, b 의 합은?

① 12

② -12

③ 15

④ -15

⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$ 의 한 해근이 ω 이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore \omega^2=-\omega-2$

$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$

$= (b-a)\omega + (12-2a)$

$f(\omega)=3\omega$ 이므로

$(b-a)\omega + (12-2a)=3\omega$

$b-a=3, 12-2a=0 \quad (\because \omega \text{는 허수})$

$\therefore a=6, b=9$

11. x 에 관한 방정식 $|x^2 - 1| - x - k = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $1 < k < \frac{5}{4}$ ② $1 \leq k \leq \frac{5}{4}$ ③ $-5 < k < -\frac{5}{4}$
 ④ $k < 1, k > \frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5} < k < 1$

해설

$|x^2 - 1| - x - k = 0$ 을 변형하여
분리하면

$$|x^2 - 1| = x + k, y = |x^2 - 1|, y = x + k$$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면

다음그림과 같아야 한다.

$$y = -x^2 + 1, y = x + k \text{가}$$

두 점에서 만나야하므로

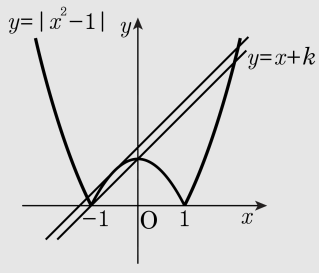
$x^2 + x + k - 1 = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

$$D = 1 - 4k + 4 > 0 \quad \therefore k < \frac{5}{4}$$

또, 직선 $y = x + k$ 는 점 $(-1, 0)$ 을 지나는 직선 위에 존재해야하므로

$$0 < -1 + k \quad \therefore k > 1$$

$$\therefore 1 < k < \frac{5}{4}$$

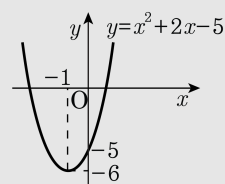


12. $-2 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

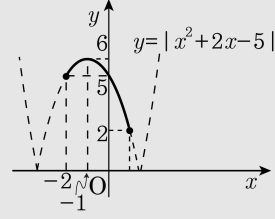
- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x + 1)^2 - 6$ 이므로
 $y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 에서
 함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로
 최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

13. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2x+1$ 이고, $(x-2)^3$ 으로 나눈 나머지가 x^2-x+6 이다. $f(x)$ 를 $(x+1)(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$

② $3x-2$

③ $3x+2$

④ x^2-2x+1

⑤ x^2-x+6

해설

$$f(x) = (x+1)^2 A(x) + 2x+1 \text{ 에서 } f(-1) = -1$$

$$f(x) = (x-2)^3 B(x) + x^2 - x + 6$$

$$= (x-2)^3 B(x) + (x-2)^2 + 3x + 2$$

$$= (x-2)^2 ((x-2)B(x) + 1) + 3x + 2$$

즉 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c 라 하면

$$f(x) = (x+1)(x-2)^2 Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x+1)(x-2)^2 Q(x) + a(x-2)^2 + 3x + 2$$

$$f(-1) = 9a - 1 = -1 \quad \therefore a = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3x + 2$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $3x+2$

14. 세 변의 길이가 x, y, z 인 삼각형 ABC 에서 등식 $(x^4 - y^4)(x + y) - 2(x^3 - y^3)z^2 + (x - y)z^4 = 0$ 이 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?
- ① $z = x$ 인 이등변삼각형, 또는 y 가 빗변인 직각삼각형
 - ② $y = z$ 인 이등변삼각형, 또는 x 가 빗변인 직각삼각형
 - ③ x 가 빗변인 직각삼각형
 - ④ y 가 빗변인 직각삼각형
 - ⑤ $x = y$ 인 이등변 삼각형, 또는 z 가 빗변인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned} & (x^4 - y^4)(x + y) - 2(x^3 - y^3)z^2 + (x - y)z^4 \\ &= (x - y)(x + y)^2(x^2 + y^2) - 2(x - y)(x^2 + xy + y^2)z^2 + (x - y)z^4 \\ &= (x - y)\{(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 + y^2) - 2(x^2 + xy + y^2)z^2 + z^4\} \\ &= (x - y)\{x^4 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 + x^2y^2 + y^4 - 2x^2z^2 - 2xyz^2 - 2y^2z^2 + z^4\} \\ &= (x - y)\{x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 + 2xy(x^2 + y^2 - z^2)\} \\ &= (x - y)\{(x^2 + y^2 - z^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2 - z^2)\} \\ &= (x - y)(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + y^2 - z^2 + 2xy) = 0 \\ \therefore & x = y \text{ 인 이등변 삼각형 또는 } z \text{ 가 빗변인 직각 삼각형} \\ (\because & x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = (x + y)^2 - z^2 \text{ 에서 삼각형의 변인 } x, y, z \text{ 는 } x + y \neq z) \end{aligned}$$

15. 정수 a, b 에 대하여 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + b = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ 의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?
- ① 무리수이다.
- ② 정수가 아닌 유리수이다.
- ㉓ 정수이다.
- ④ 홀수인 자연수이다.
- ⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

큰과 계수와의 관계에서

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= -a(\text{정수}), \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \alpha\beta\gamma = -b \\ \therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &\quad - a^2(\text{정수}) \end{aligned}$$

$$= a^2(\text{정수})$$

$$\begin{aligned} & \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a(a^2 - 0) - 3b = -a^3 - 3b \text{ (정수)}$$

그러나 $a > 0$, $b > 0$ 일면

그러나 $a > 0, b > 0$ 이면
 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ 은 자연수가 되지 않는다.